可逆马尔可夫过程

KENI MAERKEFU GUOCHENG

作者(按姓氏笔划为序)

陈木法 汪培庄 侯振挺 郭青峰

钱 敏 钱敏平 龚光鲁

湖南科学技术出版社

1979・长沙

序

近年来，远离平衡态问题的研究引起了广泛的重视，并有不少物理学家，物理化学家和生物化学家积极从事这方面的研究工作，取得了不少引人注目的成果。在数学上，*E. Nelson* 1958年首先提出了扩散过程的可逆性概念与对称化问题，这相当于平衡态统计物理中的细致平衡情况。

我们企图通过对马氏过程和马氏链可逆性的研究，为远离平衡的定常系统提供一个数学模型。本书就是我们研究成果的初步总结，其中的大部分内容是第一次公开发表。本书共分六章，第一至四章分别讨论马氏链、Q 过程、生灭过程和实轴上二阶微分算子生成的马氏过程的可逆性，第五章讨论了不可逆马氏链的环流分解与环量分布(这里的环流与物理中的*Tomita*环流类似)，研究的结论与生物化学的有关结果比较吻合。第六章建立了一种抽象场，并从场的观点出发，详细地研究了马氏链、马氏过程、Q 过程等的有势性、可配称性和可逆性等问题。

在马氏过程的可逆性方面还有许多值得深入研究的问题，诸如高维连续状态的马氏过程的可逆性与环流(*H. Ito*于1978年开始研究这个问题)、环量分布与自由能转换问题的关系，以及它们在生物化学中的应用等都有广阔的前景。

我们希望本书的出版能引起有关同志对这个问题的兴趣。

湘潭大学付教授杨向群同志细致地审阅了全书原稿并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的谢意。

作者1979.4

目 录

绪　言

马氏过程的可逆性与数学物理

具有极限分布的马氏过程是一类限制很强但在物理问题中常见的随机过程，它具有*Markov*性而且是渐近强平稳的．随时间的增长趋于定态(不一定是平衡态)的统计物理现象一般都导致这种随机过程．首次指出有必要把这类过程分出来给与专门讨论的是*Chandrasekhar*〔1〕，但是在数学文献中迄今缺少深入研究这类过程的论著．本书讨论离散时间的马氏链、由Q矩阵生成的马氏链、以及由微分算子生成的扩散过程，着重点是区分并刻划可逆和不可逆两种情况，并通过无穷小特征（Q矩阵或微分算子的系数)来表达可逆性的充要条件．可逆马氏过程一定是可对称化的，对称马氏过程的一般讨论已见于专著〔2〕;但可逆性还要求过程具有一个不变的概率分布，在过程的构造中还必须涉及唯一性的问题，所以只有在生灭过程和一维扩散的情况，可逆性问题才接近于彻底解决．本书把国内有关于这方面的工作（绝大部分尚未公开发表）汇编集中，以便征求广大数学工作者的意见和指教；也希望能引起他们对这个数学分支的兴趣．

1.可逆性与环流的物理背景

通过随机过程，尤其是高斯过程来讨论平衡态临近的不可逆现象起源于不少物理问题，特别是以布朗运动为代表的涨落问题。自从爱因斯坦提出布朗运动的物理模型后，*Wiener*，*Ito*等人做了大量

的数学工作，到五十年代初形成了一个数学上完整并严谨的领域，即扩散过程与随机微分方程．与此同时，*Onsager*以高斯模型为主要工具，系统地把随机过程用作讨论不可逆过程热力学的基础；在1953年前后他和*Machlup*一同提出了 *Onsager—Machlup* 原理，它事实上是随机过程概率密度的一个泛函表达式，这是一个数学命题；这一类公式还可以推广到非线性系统，关于详细情况请参阅*Graham*的著作〔3〕．进一步发展高斯模型用以研究化学物理问题的还有*Keiser*〔4〕，远离热力学平衡态的理论是分别由*Haken*等人对激光〔5〕，*Prigogine* 等人对化学振荡提出的〔6〕，现在研究这方面问题的还有日本的*Hasegawa*等〔7〕．什么是远离平衡态，*Prigogine* 认为必须是由平衡态通过分枝产生．分枝现象目前只对确定性的动力系统才有明确的含义，用它来说明远离平衡态的做法有一定的局限性．结合远离平衡态的概念，*Prigogine*还提出具有正熵产生率的定常开系统的说法，并以此定义散逸结构．在非平衡态的领域内，不同的著者常用类似的术语来命名不同的物理概念，例如不少作者用散逸系统来称呼有耗散的体系(*Emch*〔8〕，*Davies*〔9〕)，他们所谓的散逸状态是包含热力学平衡态的．*Prigogine*所研究的有序现象分空间和时间两方面，如果只考虑时间的有序问题，情况比较单纯，这时数学上的马尔可夫链和扩散过程是一个能经受严格推敲的抽象模型．本书结合不可逆性研究了这个数学模型，其结果当然是初步的；只对几种特殊的情况(例如生灭过程，一维扩散)得到了接近完全的结果．按照作者们的想法，马链或扩散主要描写的是宏观现象，但也可以是亚宏观现象(例如生物大分子的状态)．在讨论有序现象时，第一步是区分热力学平衡和非热力学平衡．物理上的细致平衡条件是区分这个差别的有效标志．马氏过程的可逆性就是细致平衡这个物理概念的数学表达．我们知道，热力学平衡一般是通过细致平衡达到

的〔10〕，不细致平衡的定常状态应该有什么特征？回答是必须出现环流。这个结论在马链的情况已可以用定理的形式写出来〔本书第五章〕.定理的结论是任何一个平稳的马链一定可以分解成为细致平衡和环流两部分，细致平衡部分对时间反演来说是对称的，环流部分则是反对称的。一个马链若只含细致平衡部分，就成为一个对时间可逆的随机过程，也就是说，它的统计特性对时间逆转来说是不变的。这些讨论说明非热力学平衡的体系只要能达到定态，就在一定程度上表现出时间的有序性。

对马尔可夫链也可以引入熵产生率的概念，有环流的马链具有正的熵产生率，反之亦然。所以有环流的马链是一个远离平衡态的模型；我们不称之为散逸结构，因为它不同于 *Prigogine* 的散逸结构，后者是指系统的子系通过相互合作产生的宏观上的周期现象。我们认为序的概念可以有几个层次。最低的一层是脱离热力学平衡产生环流的状态，这种序当然不是单纯的微观特征，但也不一定在宏观上有明显的表现，但如果把大分子的状态称为亚宏观态，则这种序是在亚宏观意义下的确存在的。

2.可逆性、环流与自由能转移

为了进一步说明上一段的结论，我们谈谈与大分子的状态密切有关的生化现象。在生化反应中，明显地表现出了对于时间的不可逆性，甚至可以说，不可逆性是生命运动的特点之一。以环流平衡保持定常的状态在物理学中所见不多，在化学中也还不是公认为普遍存在的，但在生物化学中，环 (*Cycles*) 的出现则是确定无疑的。能否把马氏链的环流理论作为统一这类现象的一个数学模型，这样说法目前可能根据不足，但是在本书写作的过程中，作者查阅的一批文献说明，生物体中自由能转换的 *Hill* 模型〔11〕的确提供了一个有说服力的例子。从 1966 年 到1978年，*T. L. Hill*，*R. M. Simons*，

*Y.Chen*等人把生物大分子的结合和转变用一个亚宏观的模型一般地表达出来，所得的结论可以用来说明肌肉收缩的功能，以及*Hodgekin*—*Huxley* 模型中钾、钠离子主动迁移穿透生物膜的机理，他们还指出按原来 *Hodgekin*—*Huxley*的平衡态设想，则生物膜中电流及电压的功率谱应该有*Lorentz*线型，但是*H.M.Fishman*〔12〕在关于鱿鱼触角轴突(*Axon*)的实验中可能观察到了功率谱的呈现尖峰的现象〔13〕，〔14〕，环流模型将为此提供恰当的解释。这方面的工作的初步总结是1977年*Hill* 的书〔11〕。本书的第一、第五章可以作为〔11〕第一、二章的数学理论基础。

在自由能转换的不可逆过程中〔11〕,必须伴随着自由能的耗散，*Hill* 的模型是一个分析得较为彻底并密切结合生化现象的亚宏观散逸有序系统的例子，在这里熵产生就是自由能耗散。与此接近的文献有 *Schnakenberg*〔15，16〕，〔16〕中的论述更着重于原理和一般方法，但是缺少与实验的比较。阅读本书第一到第五章时，参照上述文献〔11—16〕，可以较好地了解环流理论联系实际问题的现状。和这些文献相比，本书第一，第五章除了数学上的严格性之外，还在于明确叙述并证明了环流分解定理，作为特殊情况，当不出现环流部分时，易证马氏链是细致平衡的。分解定理的每个环上有相应的流和力，从而有一个熵产生率，而一个不可逆马氏链的熵产生率等于它包含的各个环流上熵产生率的和。一个马氏链中包含的环的个数，在一定意义下是唯一的。所以马氏链的每一个环也可以看作一个自由度。马氏链的每一个状态，我们称之为亚宏观状态，这就是说它对应于大分子的某种特征，这种特征所确定的微观状态还有许许多多，但是这种特征并非宏观可观测的量，而是介于宏观参数和微观量之间的一个物理参数。对应于马链的每一个状态 i，有平稳分布$p_i(\infty)$，如果记

$$p_i(\infty)=e^{-A_i/\kappa T}(\sum_i e^{-A_i/\kappa T})^{-1},$$

则Hill指出在细致平衡条件下A_i的确是系统在状态i的自由能．这样马氏链中讨论的迁移概率可以和量子论中微粒子从一个能阶到另一个能阶的跃迁比拟．但是这里涉及的不是真实的微观能阶，而是亚宏观系统自由能的能阶．这种跃迁在细致平衡时一般只引起自由能的耗损．但当环流出现时会放出能量，这可能对应于生物萤光现象．*Hill* 书的不少章节讨论了如何在不细致平衡的条件下把这一类现象表述为一定的规律，并运用这些规律解释生物体的机能．他所讨论的例子除了前面所说的肌肉收缩问题和钾离子的主动迁移外，还有*Mitchell*用来研究叶绿体和腺体的化学渗透模型．*Mitchell* 的学说现在已为大多数生物化学工作者所接受并在1978年被列为重大科学成就之一；比起*Prigogine*的理论来，这里涉及的问题具有较直接的生物学涵义．*Hill* 还指出，他的方法如用于研究视紫膜，由于实际生物体相对地说比较简单，将会导致更确定的结论．*Hill* 的方法缺少一个坚实明晰的理论结构作为基础，本书第五章试图用马链的语言提供这样一个结构(环流现象的完整数学模型)．环流是能量转换的形式，也是最简单但最明确的一种形式，从本书第五章的讨论可以看出环量分布律和*Bolzmann*的能量分布律在处理方法上很类似．后者讨论的是平衡状态下的配分，前者讨论的则是运动方式的配分．在 *Hill* 的理论中，环还被用作相互作用的基本单元（象固体中的元激发)，这里涉及许多有趣的生物物理规律，有兴趣的读者可参阅〔11—16〕及其中所引的文献．

给定一个Q矩阵，由它所构造的Q过程在什么条件下是可逆的，这样的可逆过程有多少，这些问题在生灭过程的情况已经得出了最终的答案(本书第三章)．对一般马氏链来说，也有不少结果（本书

第一章），这里引入了示性数，不但可由它讨论可逆性的条件，还有助于提供求出平稳分布的方法。为了阅读本书这一部分章节，最好能先了解一下生灭过程构造论的分析方法〔17〕。有关齐次可列马尔可夫过程，侯振挺、郭青峰两同志不久前出了一本专著，该书重点在于唯一性准则与构造论，但是要把 Q 过程的可逆性和环流现象彻底讨论清楚，构造具有一定环流特征的 Q 过程，并找到环流分解的有效途径，〔18〕是可读的较全面的论著，此外也可以参阅 *Reuter* 的文章〔19〕，以及〔20〕，〔21〕。从生灭过程和马链来了解可逆性及环流现象，可以为进一步研究一般的扩散过程中对应的问题提供有效的信息。例如，一维扩散的结果和生灭过程的相应结果是完全吻合的。一般 Q 过程的可逆性判据及处理方法则可作为 n 维扩散过程的借鉴。链的模型目前也为许多实际工作者所采用，*Haken*，*Gortz* 等人工作中的某些结果实际上可由马氏链的可逆性定理得出〔22〕，〔23〕；本书对涉及的概念和命题给了数学上严格的定义和证明，并且讨论了较困难的存在性及唯一性问题。

3.扩散过程的可逆性

在扩散过程的情况，首次提出可逆性概念的是 *E. Nelson*〔24〕。因为在一般的情况，微分算子生成半群的问题比较复杂〔25〕，〔26〕，也不可能得到唯一性的有效判据，所以从微分算子构造可逆扩散过程的问题不能彻底解决。如果考虑扩散的相空间为圆周，则情况特别简明。可以证明〔27〕，算符

$$L=\frac{d}{d\theta}\left(a(\theta)\frac{d}{d\theta}\right)+b(\theta)\frac{d}{d\theta}+c(\theta)$$

$$(a(\theta)>0,\ c(\theta)<0;\ 0\leqslant\theta<2\pi)$$

生成唯一一个可逆扩散过程的充分必要条件是

$$\begin{cases} c(\theta)=0, \\ \int_0^{2\pi} b(\theta)d\theta=0. \end{cases}$$

在本书第四章中基本上解决了在R_1上相对应的问题。这里重新整理了*Feller*关于微分算子生成半群的重要工作，使之适用于在算符中出现吸收项$c(x)$的情况，并得到了最小过程可逆的充要条件，进一步还求出局部边值下一般过程可逆的充要条件。所得结果和生灭过程的有关命题完全一致。如果算符中出现$c(x)$，则可逆过程的存在要求$c(x)$不是定号的，即有吸收也有放射，在这种情形如何构造可逆过程的问题尚有待解决。

4.可逆扩散过程研究的前景

一维可逆扩散问题的研究虽然导致十分完整的结论，但其应用价值却是有限的，因为这时实际上并不可能出现环流现象（如不考虑在无穷远处的流入）；在圆周上虽然可以存在环流，这类现象仅仅在锁相环的相位扩散和跳周中有所体现〔28〕。如果讨论多维扩散过程的可逆性，首先要求漂移系数满足一个全微分条件——位势条件〔29〕。前面已经讲过，在这个条件下由生成算符构造可逆过程的问题不可能彻底解决，因为在全空间抛物型方程没有基本解系，其*Cauchy*问题的唯一性也不易处理。但是，有一点是值得指出的，就是表达可逆性的位势条件使得微分算符可以对称化，所以马尔可夫半群的生成元将是自共轭的。为了构造这一类马尔可夫过程可以广泛利用自伴算子的理论。如果不考虑极限分布的存在，这一类问题属于对称马尔可夫过程和 *Dirichlet*空间的范围〔30〕。如果要求过程是可逆的，则还须有极限分布存在——过程有一个不变测度，这样的随机过程有许多很强的性质，如强平稳性，遍历性等等。从个别具体的例子来看〔8〕，这类过程中包含了大量特例，它们是强混合型

的，它们的算子谱可以完整地分解为点谱部分和绝对连续部分，它们的功率谱可以用算子的本征展开写出来，它们可以嵌入到一个保守的力学体系中去——即可视为一保守动力系统分出来的子系统．这一类问题的讨论和解决，除了作为了解散逸系统的数学基础之外，还具有直接提供计算途径的特点，所以从理论和应用两方面来看都是很有意义的．

给定一个微分式和一个与之相适应的分布来构造可逆马尔可夫过程的问题，本质上等价于给定基态和能量的形式表达后构造能量算子或量子力学系统的问题．把这两种提法统一起来，可以使得两个基本上隔离的学科领域在看法和方法上互相补充．事实上，对一大类给定在 $L_2(d\mu)$ 上的扩散现象（μ为不变测度），可以在 $L_2(dx)$ 上构造与之严格等价的量子力学系统，前者的漂移系数$\vec{b}(x)$与后者的位势 $V(\vec{x})$之间互换公式为〔31〕

$$V(x)=\frac{1}{4}\vec{b}(\vec{x})\cdot\vec{b}(\vec{x})+\frac{1}{2}\nabla\cdot\vec{b}(\vec{x}).$$

这个公式提供了用量子力学多体问题的方法来处理高维扩散方程的途径〔32〕．

如果考虑相空间是无穷维的，相应的问题直接联系到公理化量子场论的构造问题．通过*Dirichlet*空间来研究这个问题的有*Abelverio*〔33〕，他所得的结果类似于*Glimme*的二维模型．

5．两个物理应用

直接应用扩散过程可逆性模型并为这类过程提供了大量有兴趣的例子的实际问题有两类：锁相环的噪声分析和激光器的相关特性．这两类问题的数学处理方法有着触目的相似．它们都是从一组随机微分方程出发，通过*Fokker-plank*方程来讨论相应强平稳过程的相关特性和谱．在可逆性条件不成立即有环流出现时，物理上称为出现偏

调（*detuning*）。偏调在锁相环中导至单向跳周〔28〕，在激光中偏调与线型有密切的关系〔29〕。在锁相和激光理论中出现的典型马氏过程是二维的，它们的生成算符分别为〔34，29〕：

$$L_1 = A\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - B\left[\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\beta - \sin\phi\right)\right] - \tilde{a}(\phi - z)\left(\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(0\leqslant\phi<\pi,\ -\infty<z<\infty;\ A,\ B,\ \tilde{a}\geqslant 0),$$

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \beta(a - r^2)\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$-\left[a + \left(\frac{a^2}{4} - 2\right)r^2 - \frac{a^2}{2}r^4 + \frac{1}{4}r^6\right]$$

$$(a>0,\ \beta\geqslant 0;\ 0<r<\infty,\ 0\leqslant\phi<z\pi),$$

这里L_1的特点是二阶导数部分是退化的，L_2的特点是在$r=0$具有奇性。构造这一类微分式生成的马氏过程（当$\tilde{a}$，$\beta=0$ 时是可逆的）的问题，尤其是唯一性问题是锁相和激光理论的数学基础部分，其相关函数和谱的计算则是必不可少的实际问题，这类问题在数学上严格的处理至今尚无完整的结果。和一维问题相比较，我们可以大致看出困难之所在。仔细阅读本段所引的文献将有助于提出新的随机过程的问题。

最近，我们从场论的观点出发，重新考查了“可逆性”等问题（详见第六章），看来在这方面还有一系列工作可做。

作为这个粗浅的绪言的结束，我们希望说明本书的作者都是数学工作者，我们感到从一定的实际背景来建立马氏过程的数学模型可以导出一些新的想法，但是我们对所涉及的物理现象，尤其是大

量生、化现象是一知半解的，错误一定很多，更谈不上所得的结果能有多少具体用途。恳切希望各界同志们批评指正。

钱 敏

于北京大学1979年3月

参 考 文 献

〔1〕 Chandrasekhar, S. (1943) Rev. Mod. Phys. 15, 1.

〔2〕 Silverstein, M. L. (1974) Symmetric Markov Processes (Lecture Notes in Math. 426, Springer).

〔3〕 Graham, R. (1973) Springer tracts in Modern Physics, 66 (Springer).

〔4〕 Keiser, J. (1975, 1976). J. Chem. Phys. 63, 398; 64, 1679.

〔5〕 Haken, H. (1977) Synergetics, An Introduction (Nonequilibrium Phase Transitions and Self—organization in Ph. Ch. and Biology) (Springer) 及其中文献。

〔6〕 Nicolis, G. and Prigogine, I. (1977) Self—organization in Nonequilibrium Systems (J. Wiley and Sons).

〔7〕 Hasegawa, H. (1976, 1977) Progress of Theort. Phys. 55, 90; 56, 44; 57, 1523; 58, 128.

〔8〕 Emch, G. (1973) J. Math. Phys. 14, 1775.

〔9〕 Davies, E.B. (1976) Quantum Theory of Open Systems (Academic Press).

〔10〕 王竹溪 (1978) 统计物理学导论（人民教育出版社）。

〔11〕 Hill, T. L. (1977) Free Energy Transduction in Biology 及其中所引文献 (Acad. Press)

〔12〕 Fishman, H. M. (1973) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 70:876.

〔13〕 Chen, Y-D (1973) Biophysical J.13, 1276.

〔14〕 同上 (1975) J. Theort. Biol. 55, 229.

〔15〕 Schnakenberg (1976) Rev. of Mod. Phys. 48, 4.

〔16〕 同上 (1977)Thermodynamic Network Analysis of Biological Systems (Springer).

〔17〕 杨超群 (1964) 双边生灭过程 南开大学学报 5(5), 9.

〔18〕 侯振挺，郭青峰 (1978) 齐次可列马尔可夫过程 (科学出版社)

〔19〕 Reuter, G. E. (1957) Acta Math. 97, 1.

〔20〕 王梓坤 (1965) 随机过程论 (科学出版社).

〔21〕 Chung, K.L. (1960) Markov Chains with Stationary Transition Probabilities (Springer).

〔22〕 Haken, H. (1975) Rev. of Mod. Phys. 47, 67.

〔23〕 Gortz, R. (1976) Z. Physik, B 25, 423.

〔24〕 Nelson, E. (1958) Duke Math. J. 25, 671.

〔25〕 同上 (1958) Trans. A. M. S. 88, 414.

〔26〕 钱 敏 (1979) 椭圆型算子的扩张与Ĉ半群 数学学报(第四期).

〔27〕 郭懋正，吴承训 二阶周期微分算子生成的马氏过程及其可逆性 (待发表：应用数学).

〔28〕 Lindsey, W. C. (1972) Synchronization Systems in Communication and Control (Prentice—Hall).

〔29〕 Risken, H.(1973) Detuned Single Mode Laser and Detailed Balance (Coherence and Quantum Optics, Ed. Mandl and Wolf).

〔30〕 Fukushima, M. (1973) in Lecture Notes in Math. 330, (Proccedings of Jap—U S S R Sym. on Prob. Th.)

〔31〕 Abelverio, S. (1977) J. of Math. Phys. 18, 907.

〔32〕 Peschel, I. d Dieterich, W. (1978) Z. f. Phys. B 31, 195.

〔33〕 Abelverio, S. (1977) Wahr. Ver. Geb. 40, no.1.

〔34〕 Viterbi, A. J.(1966) Principles of Coherent Communication (McGraw—Hill).

第一章 可逆马尔可夫链

汪培庄

（北京师范大学）

在马氏过程的领域中扩展有关可逆与不可逆性的概念和理论，为生物物理与生命现象研究的激进发展增添一项新的数学理论和工具，这是钱敏深刻察觉并提出的一项使命。钱敏平[2]在国内最先从事了这一工作。

生命现象的物理基础，超出了平衡态统计物理的范围，促进了统计物理在远离平衡区域中的发展，因此，注意平衡态与非平衡态的差别是十分必要的。马氏过程可以刻划相当广泛的一类物理和生物现象，统计物理中平衡与非平衡的区分，在马氏过程中便提出了可逆与不可逆的划分。

在这一章里，我们研究具有离散参数的齐次可列马尔可夫链的可逆性。针对可逆马氏链所显示的某种位势性质，提出链势的概念，并提出判断可逆性的准则，给出细致平稳分布的简捷求法。

§1.1. 马氏链的可逆性定义

设E是一个至多可数集，$X(n)$ $(n\geqslant 0)$ 是一个以E为状态空间的时齐马氏链，具有转移概率矩阵$P=(p_{ij})$及初始分布$a=\{a_i\}(i\in E)$。

$X(n)$的可逆性有以下三个等价定义：

定义1.1.1. 过程$X(n)(n\geqslant 0)$叫做可逆，若对任意一组具有相同间隔的时刻$n, n+m, \cdots, n+sm$，$(n\geqslant 0, m\geqslant 1, s\geqslant 1)$及任意$i_0, i_1, \cdots, i_s\in E$，都有

$$P(X(n)=i_0, X(n+m)=i_1, \cdots, X(n+sm)=i_s)$$
$$=P(X(n)=i_s, \cdots, X(n+sm)=i_0) \qquad (1.1.1)$$

定义1.1.2. 过程$X(n)(n\geqslant 0)$叫做可逆，如果有

$$a_i p_{ij}=a_j p_{ji} \qquad (i, j\in E) \qquad (1.1.2)$$

($\{a_i\}$是初始分布)。

一个马氏链，把时间颠倒，仍然是一个马氏链。如果原过程是时齐且时律平稳的，则逆过程亦然，此时，逆过程具有转移矩阵$\hat{P}=(\hat{p}_{ij})$，

$$\hat{p}_{ij}=\frac{a_j}{a_i}p_{ji} \qquad (i, j\in E) \quad (a_i>0).$$

定义1.1.3. 过程$X(n)$叫做可逆，如果它的逆过程是时齐的，且

$$\hat{p}_{ij}=p_{ij} \quad (i,j\in E). \qquad (1.1.3)$$

三个定义是等价的。定义1.1.1与定义1.1.2的等价性可完全仿照[1]证明；定义1.1.3与前二者的等价，要求把过程无正概率到达的状态从E中去掉，亦即，要求对任意$i\in E$，都有$n=n(i)$，使

$$P(X(n)=i)>0.$$

等价性的证明是显然的。

我们关心的是转移矩阵P，它该满足什么条件，便可配上适当的初始分布，使过程可逆？更宽泛一些，给出

定义1.1.4. 称P可配称，若有不恒为零的非负实数列$\{u_i\}$，使有

$$u_i p_{ij}=u_j p_{ji} \qquad (i, j\in E) \qquad (1.1.4)$$

$u_i\}$称为配称列．如果还有

$$\sum_{i\in E} u_i = 1 \tag{1.1.5}$$

则称P可逆，称$\{u_i\}$为配称分布或细致平稳分布。

易见，若P可逆，则以配称分布为初始分布，对应的马氏链是可逆的。

易见，P可逆，当且仅当它可配称且有

$$0 < u = \sum_{i\in E} u_i < +\infty \quad (\{u_i\}\text{是配称列}) \tag{1.1.6}$$

此时，令

$$v_i = \frac{u_i}{u} \qquad (i\in E) \tag{1.1.7}$$

则$\{v_i\}$即为配称分布。

配称列有以下最明显的性质：

性质1 若$\{u_i\}$是P的配称列，$c>0$，则$\{cu_i\}$也是P的配称列；

性质2 若$\{u_i\}$,$\{v_i\}$是P的配称列，则$\{u_i+v_i\}$也是P的配称列；

性质3 若$\{u_i\}$是P的配称列，则它也是$P^n(n\geqslant 1)$的配称列。

事实上，

$$\begin{aligned} u_i p_{ij}^{(2)} &= u_i \sum_k p_{ik} p_{kj} = \sum_k (u_i p_{ik}) p_{kj} = \sum_k (u_k p_{ki}) p_{kj} \\ &= \sum_k p_{ki} (u_k p_{kj}) = \sum_k p_{ki} (u_j p_{jk}) = u_j \sum_k p_{jk} p_{ki} \\ &= u_j p_{ji}^{(2)}. \end{aligned}$$

类似可证，对任意$n\geqslant 1$均有

$$u_i p_{ij}^{(n)} = u_j p_{ji}^{(n)}. \tag{1.1.8}$$

称a，b二数零同，如果它们同时为零或同时不为零。

性质4 设$\{u_i\}$为P的配称列，若i，j互通，则u_i与u_j零同。

证 令$N=\{n|n\geqslant 1,\ p_{ij}^{(n)}>0\}$，

$M=\{m|m\geqslant 1,\ p_{ji}^{(m)}>0\}$，$i$与$j$互通的意思是$N$、$M$均不空．这有两种可能，

1.$M\cap N\neq\varnothing$，取$n\in M\cap N$，则$p_{ij}^{(n)}>0$，$p_{ji}^{(n)}>0$，由(1.1.8)知u_i与u_j零同。

2.$M\cap N=\varnothing$，取$n\in N$，$m\in M$，此时有$p_{ij}^{(n)}>0$，$p_{ji}^{(n)}=0$，由(1.1.8)推知$u_i=0$；又有$p_{ji}^{(m)}>0$，$p_{ij}^{(m)}=0$，由(1.1.8)推知$u_j=0$，亦知u_i与u_j零同．证毕。

性质 5 设$\{u_i\}$是P的配称列，若u_i与u_j均不为零，则对任意$n\geqslant 1$，$p_{ij}^{(n)}$与$p_{ji}^{(n)}$二数均零同，且有

$$p_{ij}^{(n)}/p_{ji}^{(n)}\cong u_i/u_j^{*}\quad(n\geqslant 1)\tag{1.1.9}$$

由性质3的(1.1.8)式，知性质5显然成立。

为简单计，本文只考虑既约链，即任意$i,j(\in E)$都是互通的。由性质4知：既约链若有配称列$\{u_i\}$，则u_i恒不为零。

§2.2. 可配称与可示性

P可配称，它便可以显示某种位势特性．侯振挺最早对Q过程引入了示性数的概念。

称状态的有穷序列$(i,\ i_1,\ \cdots,\ i_{n-1},\ j)$为一条$n$节通路，如果$p_{ii_1}\cdots p_{i_{n-1},j}>0$。称一条通路可返，如果其逆序列也是通路。对于可返通路$(i,\ i_1,\ \cdots,\ i_{n-1},\ j)$来说，往返转移概率具有有限而不为零的比值：

$$\frac{p_{ji_{n-1}}\cdots p_{i_1i}}{p_{ii_1}\cdots p_{i_{n-1}j}}$$

---

* 本文将多次采用符号$\cong$，表示等号的效用限于等式两端均有意义之时．对于分式，除了0/0或∞/∞之外均认为有意义。

简称为这条可返通路的对流比。一般说来，它与路径有关。

定义1.2.1. 既约链P叫做可示性，如果 1）任一通路都可返；2）对任意 i，$j\in E$，从 i 到 j 的任意通路，都具有相同的对流比r_{ij}。称r_{ij}为从i到j的示性数，而称 $R \triangleq (r_{ij})$ 为链P的示性矩阵。

定理1.2.1.

1）既约链P可配称的充要条件，是它可以示性；

2）既约链P可逆的充要条件，是它具有列和有限的示性矩阵。

证 1）的必要性：设 $\{u_i\}$ 是P的配称列，因P既约，u_i恒不为零。又由性质5，知对任意$i,j\in E$，p_{ij}与p_{ji}零同。这就保证任一通路均可返。且由(1.1.9)，知其对流比为：

$$\frac{p_{ji_{n-1}}\cdots p_{i_1 i}}{p_{ii_1}\cdots p_{i_{n-1}j}}=\frac{p_{ji_{n-1}}}{p_{i_{n-1}j}}\cdots\frac{p_{i_1 i}}{p_{ii_1}}=\frac{u_{i_{n-1}}}{u_j}\cdot\frac{u_{i_{n-2}}}{u_{i_{n-1}}}\cdots$$

$$\cdots\frac{u_{i_1}}{u_{i_2}}\cdot\frac{u_i}{u_{i_1}}=\frac{u_i}{u_j}$$

与路径无关，故P是可示性的，各示性数为

$$r_{ij}=\frac{u_i}{u_j}\qquad (i,\ j\in E)\qquad (1.2.1)$$

1）的充分性：设P有示性矩阵R，我们先证明任何示性矩阵都具有性质

$$r_{ij}r_{jk}=r_{ik}\qquad (i,\ j,\ k\in E)。\qquad (1.2.2)$$

事实上，设$(i,\ i_1,\ \cdots,\ i_n,\ j)$是从$i$到$j$的一条通路，$(j,\ j_1,\ \cdots,\ j_m,\ k)$是从$j$到$k$的一条通路，则

$$(i,\ i_1,\ \cdots,\ i_n,\ j,\ j_1,\ \cdots,\ j_m,\ k)$$

是从i到k的一条通路，且

$$r_{ij}r_{jk}=\frac{r_{ji_n}\cdots r_{i_1 i}}{r_{ii_1}\cdots r_{i_n j}}\ \frac{r_{kj_m}\cdots r_{j_1 j}}{r_{jj_1}\cdots r_{j_m k}}$$

$$=\frac{r_{kj_m}\cdots r_{j_1 j}r_{ji_n}\cdots r_{i_1 i}}{r_{ii_1}\cdots r_{i_n j}r_{jj_1}\cdots r_{j_m k}}=r_{ik}.$$

故(1.2.2)真。

取定$i_0\in E$，令

$$u_i=r_{ii_0}>0 \qquad (i\in E) \qquad (1.2.3)$$

往证$\{u_i\}$就是P的配称列。

对任意i，$j\in E$，若$p_{ij}>0$，则$(i,\ j)$是通路，P可示性要求通路必可返，故$p_{ji}>0$，且

$$p_{ji}/p_{ij}=r_{ij}$$

由(1.2.2)，且注意$r_{st}=1/r_{ts}$，则

$$p_{ji}/p_{ij}=r_{ij}=r_{ii_0}r_{i_0 j}=\frac{r_{ii_0}}{r_{ji_0}}=\frac{u_i}{u_j},$$

$\therefore \quad u_i p_{ij}=u_j p_{ji}$。

由$p_{ji}>0$又可推出$p_{ij}>0$，故若$p_{ij}=0$，则$p_{ji}=0$，上式亦真，这就证明了P是可配称的。

往证2)

由(1.2.3)式可见，R 的任二列都成比例，R 的每一列都是P的一个配称列，而配称列具有有限和乃是P可逆的充要条件，故知2)真。定理证毕。

任一示性矩阵，均具有以下性质：

(R.1) $0<r_{ij}<+\infty \qquad (i,\ j\in E)$

(R.2) $r_{ij}=1/r_{ji} \qquad (i,\ j\in E)$

(R.3) $r_{ij}r_{jk}=r_{ik} \qquad (i,\ j,\ k\in E)$

具有性质 (R.1)—(R.3) 的矩阵叫做协调矩阵。协调矩阵的任意两行(列)成比例，

$$r_{ik} : r_{jk} = r_{ij} \qquad (k \in E)$$
$$r_{ik} : r_{ij} = r_{jk} \qquad (i \in E) \qquad (1.2.4)$$

这由(R.3)立得。由(R.2)，(R.3)还可推得

(R.4)　$r_{ii} = 1 \qquad (i \in E)$

协调矩阵S总可以表为一个正数列$\{\pi_i\}$($\pi_i > 0$)的"对除"：

$$S_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_j} \qquad (i \in E) \qquad (1.2.5)$$

这只要取S的任一列作为$\{\pi_i\}$即可。

反之，任一正数列$\{\pi_i\}$对除，必得一协调矩阵。

P的示性矩阵R就是由P的任一恒不为零的配称列$\{u_i\}$对除而得的协调矩阵。R与$\{u_i\}$之间的关系再次归纳于下：

(U.1)　$r_{ij} = u_i / u_j \qquad (i, j \in E)$

（固定j，说明R的第j列与$\{u_i\}$成比例，固定i，说明R的第i行与$\{1/u_j\}$成比例。

(U.2)　$\sum_i r_{ij} = \frac{1}{u_j} \sum_i u_i \quad (j \in E)$

特别，当$\{u_i\}$为配称分布（$\sum_i u_i = 1$）则有

$$u_j = 1 / \sum_i r_{ij} \qquad (1.2.6)$$

(U.3)　$\sum_j r_{ij} = k u_i \quad \left(k = \sum_j \frac{1}{u_j}\right) \ (i \in E)$。

§1.3. 翻除判别法

假定P的元素均不为零，要问，P是否可逆？如果可逆的话，其细致平稳分布是什么？答案是极为简单的。

定理1.3.1. 设P的元素均不为零，记$S(P)=(S_{ij})$

$$S_{ij}=\frac{p_{ji}}{p_{ij}} \quad (i,\ j\in E) \tag{1.3.1}$$

则P可配称的充要条件是$S(P)$满足$(R.1)$—$(R.3)$，且$R=S(P)$就是P的示性矩阵。P可逆的充要条件是$S(P)$满足$(R.1)$—$(R.3)$且列和有限，此时，取$S(P)$的任意一列使之归一化，或者按(1.2.6)，取$S(P)$列和的倒数，均可得到P的细致平稳分布。

证 对任意$i,\ j\in E$，因p_{ij}与p_{ji}均不为零，故$(i,\ j)$为一可返通路。S_{ij}就是它的对流比．易见$S(P)$满足$(R.3)$是对流比与路径无关的充分必要条件。事实上，若$(R.3)$真，则对任一通路$(i,\ i_1,\cdots,i_n,\ j)$均有

$$\frac{p_{ji_n}\cdots p_{i_1i}}{p_{ii_1}\cdots p_{i_nj}}=\frac{p_{i_1i}}{p_{ii_1}}\cdots\frac{p_{ji_n}}{p_{i_nj}}=S_{ii_1}\cdots S_{i_nj}\overset{(R.3)}{=\!=\!=}S_{ij},$$

与路径无关．反之，若对流比与路径无关，则因$(i,\ j,\ k)$是一条可返通路，应有

$$\frac{p_{kj}p_{ji}}{p_{ij}p_{jk}}=\frac{p_{ki}}{p_{ik}}=S_{ik}$$

但

$$\frac{p_{kj}}{p_{jk}}=S_{jk}, \qquad \frac{p_{ji}}{p_{ij}}=S_{ij}$$

故知$(R.3)$真。

由于P对定义1.2.1的1)当然成立，而$S(P)$对$(R.1)$，$(R.2)$当然成立，故知P可示性的充要条件是$S(P)$协调，由定理1.2.1，即证得本定理的前一论断。且$S(P)$就是P的示性矩阵。由定理1.2.1的2)及$(U.1)$与(1.2.6)，立得定理1.3.1的其余论断。证毕。

例如，给定

$$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{4}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8}\\ \frac{6}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

将P围绕对角线翻除一下，得

$$S(P)=\begin{pmatrix}1 & 3 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & 2 & 1\end{pmatrix}$$

看一看$S(P)$是否满足$(R.1)$—$(R.3)$，($(R.3)$可理解为各列（行)之间成比例)，故肯定P是可配称的，对有限状态，列和必有 限，故P是可逆的。

它的配称分布，可以任取一列，比如第二列加以归一化而得到。

$$\mu_1=\frac{3}{3+1+2}=\frac{3}{6},\qquad \mu_2=\frac{1}{6},\qquad \mu_3=\frac{2}{6}.$$

也可以按(1.2.6)式，对$S(P)$逐列求和，取倒数而得到：

$$\mu_1=\frac{1}{1+1/3+2/3}=\frac{3}{6},\qquad \mu_2=\frac{1}{3+1+2}=\frac{1}{6},$$

$$\mu_3=\frac{1}{3/2+1/2+1}=\frac{2}{6}.$$

一般地，无论P的元素是否为零，

定义1.3.1. 记0/0为不定元*，含有*的矩阵称为拟阵。对于任意给定的一个普通矩阵(非拟阵)P，记$S(P)=(S_{ij})$

$$S_{ij}=\begin{cases} p_{ji}/p_{ij} & (p_{ij},\ p_{ji}\text{不全为零}) \\ * & (p_{ij}=p_{ji}=0) \end{cases}$$

叫做P的翻除拟阵。一个拟阵叫做协调拟阵，如果在它的非*元素上均满足(R.1)—(R.3)。

定义1.3.2. 下面的命题称为翻除判据：

P可配称的充要条件是，$S(P)$是一个协调拟阵。

定理1.3.1 说明，当$S(P)$是一个普遍矩阵时，翻除判据是正确的。一般说来这个判据是不一定正确，条件的充分性不一定成立。但这个判据若成立，则P的可逆性将极容易判断，且配称分布极易求得：

对于给定的P，写出翻除拟阵$S(P)=(S_{ij})$，从$S(P)$的非*元素出发，按照(R.1)至(R.3)，以任意方式对*元素赋值，迭代地重复这一步骤，最后将$S(P)$改造为普通矩阵。任取一列，即得P的配称列，若能归一化，则归一化为P的配称分布，此时断定P可逆；若不能归一化，则断定P不可逆。

翻除法则是否可行？关键在于：

$S(P)$中的任一*元素，如果能由$S(P)$中的非*元素按(R.1)—(R.3)赋值，所赋值是否确定？

这个问题比较复杂，究竟翻除判据在什么情况下成立，这在文章〔3〕中专有讨论。

§1.4.示性链的位势性质

在统计物理中，一个微观可逆过程（细致平衡）总伴随着某种位势条件的满足。配称分布的对数被定义成相空间的负位势。

定义1.4.1. 设既约链P可配称，选定一配称列$\{u_i\}$，记

$$\varphi_i = -\log u_i \quad (i \in E) \tag{1.4.1}$$

称$\{\varphi_i\}$为P在E上所确定的链势。

若对示性数r_{ij}取对数，由$(U.1)$知

$$\log r_{ij} = \log u_i - \log u_j = \varphi_j - \varphi_i \tag{1.4.2}$$

这样，示性数的对数$\log r_{ij}$便是j对i的链势差。可被想像为从i到j所作的某一种"功"。

$(R.3)$化为

$$\log r_{ik} = \log r_{ij} + \log r_{jk} \tag{1.4.3}$$

对从i到j的任一条路（i，i_1，…，i_n，j）有

$$\log r_{ii_1} + \cdots + \log r_{i_n j} = \log r_{ij} \tag{1.4.4}$$

"功"的总和只依赖于i，j而与路径无关。特别，对一个闭合回路$(i,\ i_1,\cdots,i_n,i)$有

$$\log r_{ii_1} + \cdots + \log r_{i_n i} = \log r_{ii} = \log 1 = 0 \tag{1.4.5}$$

沿闭合回路所作"功"为零。

给定步长1，$\log r_{i,i+1}$可被视为链势（在i处）的"梯度"。

定义1.4.2. 设链P有示性矩阵R，令

$$\alpha_i = r_{i,i+1} \quad (i,\ i+1 \in E) \tag{1.4.6}$$

$$f_i = \log \alpha_i \quad (i \in E) \tag{1.4.7}$$

称α_i为P在i处的徘徊系数，称f_i为P在i处的链势梯度。

定理1.4.1. 设P为可示性链，则

1）P可逆的充分必要条件是，对某一$j\in E$,

$$u^{(j)}=\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-1}+1+\sum_{i>j}\frac{1}{\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{i-1}}<+\infty \tag{1.4.8}$$

2）若P可逆，则其配称分布是

$\mu_i=u_i/u$

其中

$$u_i=r_{ij}=\begin{cases}\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-1} & (i<j)\\ 1 & (i=j)\\ \dfrac{1}{\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{i-1}} & (i>j)\end{cases} \tag{1.4.9}$$

或等价地有

$$u_i=r_{ij}=\begin{cases}\exp\{f_i+f_{i+1}+\cdots+f_{j-1}\} & (i<j)\\ 1 & (i=j)\\ \exp\{-(f_j+f_{j+1}+\cdots+f_{i-1})\} & (i>j)\end{cases} \tag{1.4.10}$$

证 (1.4.9)中的$\{u_i\}$是R的第j列，它是P的一个配称列，其列和为(1.4.8)中的u，由定理1.2.1，知本定理的1）真。

又由(R.3)知

$$r_{ij}=\begin{cases}r_{i,i+1}r_{i+1,i+2}\cdots r_{j-1,j} & (i<j)\\ 1 & (i=j)\\ r_{j,j+1}r_{j+1,j+2}\cdots r_{i-1,i} & (i>j)\end{cases}$$

以(1.4.6)代入，即得(1.4.9)，以(1.4.7)代入(1.4.9)，得(1.4.10)式，证毕。

§1.5. 应用于随机游动

称链P为一随机游动，若当 $|i-j|\geqslant 2$，总有$p_{ij}=0$，采用符号

$$\begin{cases} a_i = p_{i\,i-1} & (i,\ i-1\in E) \\ b_i = p_{i\,i+1} & (i,\ i+1\in E) \\ c_i = 1-(a_i+b_i) = p_{ii} & (i\in E) \end{cases} \tag{1.5.1}$$

总设

$$a_i>0,\ b_i>0 \quad (i-1,\ i,\ i+1\in E) \tag{1.5.2}$$

对于任意i，$j\in E$，从i到j只有唯一的通路而且可返，因而定义1.2.1的要求自然被满足，故在(1.5.2)下(它保证P既约)，随机游动P总是可示性的。且有

$$\alpha_i = r_{i,i+1} = \frac{a_{i+1}}{b_i} \qquad (i,\ i+1\in E) \tag{1.5.3}$$

$$f_i = \log a_{i+1} - \log b_i \qquad (i\in E) \tag{1.5.4}$$

(见定义1.4.2)

由定理1.4.1立得

定理1.5.1. 设P为满足(1.5.2)的随机游动，则

1) P可逆的充要条件是：对某一固定的$j\in E$，

$$u=\sum_{i<j}\frac{a_{i+1}\cdots a_{j-1}a_j}{b_ib_{i+1}\cdots b_{j-1}}+1+\sum_{i>j}\frac{b_jb_{j+1}\cdots b_{i-1}}{a_{j+1}\cdots a_{i-1}a_i}<+\infty \tag{1.5.5}$$

2) 若P可逆，则其配称分布是：

$$\mu_i = u_i/u \qquad (i\in E)$$

其中

$$u_i=\begin{cases}\dfrac{a_{i+1}\cdots a_{j-1}a_j}{b_ib_{i+1}\cdots b_{j-1}} & (i<j)\\ 1 & (i=j)\\ \dfrac{b_jb_{j+1}\cdots b_{i-1}}{a_{j+1}\cdots a_{i-1}a_i} & (i>j)\end{cases}\qquad(1.5.6)$$

例 1 设$E=(0, 1, 2, \cdots, N)$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ n^{-1} & 0 & 1-n^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2n^{-1} & 0 & 1-2n^{-1} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-n^{-1} & 0 & n^{-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

亦即$b_0=a_n=1$; $b_i=1-\dfrac{i}{n}$, $a_i=\dfrac{i}{n}$ $(0<i<n)$ (Ehrenfest 扩散)。

因状态有限，又满足(1.5.2)，故由定理1.5.1，P 可逆。求其配称分布，不妨取$j=0$，由(1.5.6)，得

$$u_0=1,\ u_1=n,\ u_2=\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2,\ \cdots,\ u_{n-1}=C_n^{n-1},$$

$u_n=C_n^n$。

$$u=\sum_{i=0}^{n}u_i=\sum_{i=0}^{n}C_n^i=2^n$$

故得配称分布为

$$\mu_i=C_n^i/2^n\qquad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)。$$

例 2 设$E=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & & & & \\ a & c & b & \ddots & & & \\ 0 & a & c & b & \ddots & & \\ & \ddots & a & c & b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & a & c & b \\ & & & & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (a>0,\ b>0)$$

若$p>0$则按定理1.5.1，不妨取$j=0$，有

$$u_0=1,\quad u_i=\frac{p}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^i \qquad (i>0)$$

此时

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^i+1$$

故当且仅当$a>b$，P可逆，且其配称分布为

$$\mu_0=\frac{a-b}{a-b+p},\quad \mu_i=\frac{(a-b)pb^{i-1}}{(a-b+p)a^i}, \qquad (i\geqslant 1).$$

例 3 （双边随机游动）设

$$E=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

$$P=\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & \\ \ddots & a' & c' & b' & \ddots & & \\ & 0 & a' & c' & b' & \ddots & \\ & \ddots & & q & 1-(p+q) & p & \\ & & \ddots & & a & c & b & 0 \\ & & & \ddots & & a & c & b \\ & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$(a>0,\ b>0,\ a'>0,\ b'>0)$

只要p、q均>0，(1.5.2)真，不妨取$j=0$，由(1.5.6)有：

$$u_{-i}=\left(\frac{a'}{b'}\right)^i\frac{q}{a'}\qquad(i>0)$$

$$u_0=1$$

$$u_i=\left(\frac{b}{a}\right)^i\frac{p}{b}\qquad(i>0)$$

当且仅当$a'<b'$而$a>b$，

$$u=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_i=1+\frac{q}{b'-a'}+\frac{p}{a-b}<+\infty$$

由定理1.5.1，P可逆的充要条件是：

$a'<b'$且$a>b$。

其配称分布为：

$$\mu_{-i}=\left(\frac{a'}{b'}\right)^i\frac{q}{a'}\Big/\left(1+\frac{q}{b'-a'}+\frac{p}{a-b}\right),\qquad(i>0)$$

$$\mu_0=1\Big/\left(1+\frac{q}{b'-a'}+\frac{p}{a-b}\right),$$

$$\mu_i=\left(\frac{b}{a}\right)^i\frac{p}{b}\Big/\left(1+\frac{q}{b'-a'}+\frac{p}{a-b}\right),\qquad(i>0).$$

参考文献

〔1〕 W.E. Brittin, B.W. Downs, K.J. Downs; Lectures in theoretical physics, New York, (1961).

〔2〕 钱敏平：平稳马氏链的可逆性。 78年第4期

〔3〕 侯振挺、汪培庄：可逆马尔可夫链——时间离散情形.北京师范大学学报 79年第一期。

第二章　可逆Q过程

侯振挺　　郭青峰　　陈木法
（长沙铁道学院）（湘潭大学）（北京师范大学）

在前一章里，我们已经研究了离散参数齐次可列马尔可夫过程的可逆性.本章讨论连续参数情形，特别着重研究Q过程的可逆性.

§2.1.　可逆平稳马氏过程

设$X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t\geqslant 0\}$是定义在完备概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的齐次可列马尔可夫过程（以下简称为过程$X=\{x(t)\}$），其相空间$E=(0,1,2,\cdots)$，转移概率为$p_{ij}(t)$，$i,j\in E$，$t\geqslant 0$，它们是一组满足下列条件的实值函数：

$$p_{ij}(t)\geqslant 0 \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=1 \tag{2.1.2}$$

$$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s) \tag{2.1.3}$$

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij} \tag{2.1.4}$$

其中　$\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0\quad(i\neq j)$.

称$U=(u_i)_{i\in E}$为正分布，如果

$$u_j>0\quad(j\in E),\ \sum_{j\in E}u_j=1. \tag{2.1.5}$$

定义2.1.1.　过程$X=\{x(t)\}$称为平稳的，如果

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = u_j \quad (\text{不依赖于} i) \tag{2.1.6}$$

存在，$U=(u_i)$为正分布，并且

$$P[x(t)=j]=u_j, \quad (j\in E, \ t\geqslant 0) \tag{2.1.7}$$

此时称$U=(u_i)$为过程$X(\omega)$的平稳分布。

定义2.1.2. 过程$X=\{x(t)\}$称为可逆的，如果对于任意的

$$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n, \tag{2.1.8}$$

只要

$$t_n-t_{n-1}=t_2-t_1, \ t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2, \ \cdots \tag{2.1.9}$$

就有

$$\begin{aligned} &P[x(t_1)=i_1, \ x(t_2)=i_2, \ \cdots, \ x(t_n)=i_n] \\ =&P[x(t_1)=i_n, \ x(t_2)=i_{n-1}, \ \cdots, \ x(t_n)=i_1] \\ &\qquad (i_1, \ i_2, \ \cdots, \ i_n\in E) \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

定义2.1.3. 矩阵$P(t)=(p_{ij}(t))$称为可配称的，如果存在正分布(u_i)，使

$$u_i p_{ij}(t)=u_j p_{ji}(t), \quad (i,j\in E, \ t\geqslant 0) \tag{2.1.11}$$

此时称(u_i)为$(p_{ij}(t))$的配称分布。

注1°. 由(2.1.3)易见，条件(2.1.11)等价于

存在$t_0>0$，使

$$u_i p_{ij}(t)=u_j p_{ji}(t), \quad (i,j\in E, \ 0\leqslant t\leqslant t_0)\text{①} \tag{2.1.12}$$

2°. 条件(2.1.11)也等价于

$$u_i p_{ij}(\lambda)=u_j p_{ji}(\lambda), \quad (i,j\in E, \ \lambda>0) \tag{2.1.13}$$

其中

$$p_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt \tag{2.1.14}$$

---

① 此条件已改进，详见第六章定理6.9.2.的证明。

定理2.1.1. 设平稳过程$X=\{x(t)\}$的转移矩阵为$(p_{ij}(t))$，平稳分布为$U=(u_i)$，则X可逆的充要条件是$(p_{ij}(t))$ 可配称且以(u_i)为配称分布。

证明 如果$\{x(t)\}$可逆，则

$$
\begin{aligned}
u_i p_{ij}(t) &= P[x(0)=i,\ x(t)=j] \\
&= P[x(0)=j,\ x(t)=i] \\
&= u_j p_{ji}(t)
\end{aligned}
$$

故$(p_{ij}(t))$可配称且以(u_i)为配称分布。反之，

$$
\begin{aligned}
& P[x(t_1)=i_1,\ x(t_2)=i_2,\ \cdots,\ x(t_n)=i_n] \\
&= P[x(t_1)=i_1]P[x(t_2)=i_2 \mid x(t_1)=i_1]\cdots \\
&\quad \cdots P[x(t_n)=i_n \mid x(t_1)=i_1,\ \cdots,\ x(t_{n-1})=i_{n-1}] \\
&= u_{i_1}\prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}}(t_{k+1}-t_k) \\
&= u_{i_1}\prod_{k=1}^{n-1} u_{i_k} p_{i_k i_{k+1}}(t_{k+1}-t_k)\frac{1}{u_{i_k}} \\
&= u_{i_1}\prod_{k=1}^{n-1} p_{i_{k+1} i_k}(t_{k+1}-t_k)\frac{u_{i_{k+1}}}{u_{i_k}} \\
&= u_{i_n}\prod_{k=1}^{n-1} p_{i_{k+1} i_k}(t_{k+1}-t_k) \\
&= u_{i_n}\prod_{k=1}^{n-1} p_{i_{n-k+1},\, i_{n-k}}(t_{k+1}-t_k) \\
&= P[x(t_1)=i_n, x(t_2)=i_{n-1},\ \cdots,\ x(t_n)=i_1]
\end{aligned}
$$

故X可逆。

定义2.1.4. 关于过程$X=\{x(t)\}$，称自 i 可到 j，如果存在$t>0$，使$p_{ij}(t)>0$（换句话说，$p_{ij}(t)\neq 0, 0<t<\infty$），称 i 与 j 互通，

如果自 i 可到 j 并且自j可到i，如果对于一切$i,j\in E$,i与j互通，就称$P(t)=(p_{ij}(t))$不可约。

定理2.1.2. 设平稳过程$X=\{x(t)\}$的转移矩阵为$P(t)=(p_{ij}(t))$，则它为可逆过程的充要条件是$P(t)$不可约并且可配称。

证明 条件的必要性显然，往证其充分性。因为$P(t)$不可约，故对于每一对$i,j\in E$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=v_j \text{ (不依赖于}i\text{)}$$

存在[7]。设$P(t)$有配称分布(u_i)，对(2.1.11)的两边关于j求和，得到

$$u_i=\sum_{j\in E}u_j p_{ij}(t), \qquad (i\in E)$$

于是由控制收敛定理知

$$u_i=\sum_{j\in E}u_j\lim_{t\to\infty}p_{ji}(t)$$

$$=\sum_{j\in E}u_j v_i=v_i \qquad (i\in E) \qquad (2.1.15)$$

然后由定理2.1.1知过程X可逆。

§2.2. Q 过 程

我们知道，对于过程$X=\{x(t)\}$的转移概率矩阵$P(t)=(p_{ij}(t))$，下述极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-q_{ij}}{t}=q_{ij} \qquad (2.2.1)$$

存在，而且

$$0\leqslant q_{ij}<\infty \quad (i\neq j),$$

$$0 \leqslant q_i = -q_{ii} \leqslant +\infty,$$

$$\sum_{j \in E} q_{ij} \leqslant 0.$$

当$q_i < \infty (i \in E)$时，称过程是可微的，并称$Q=(q_{ij})$为过程的密度矩阵；而过程 $X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t \geqslant 0\}$ 则简称为 Q 过程，以表示它与Q有(2.2.1)的关系．如果两个Q过程有相同的$(p_{ij}(t))$，我们将它视作同一Q过程，故在下面，我们也将满足(2.1.1)——(2.1.4) 和(2.2.1)的$(p_{ij}(t))$或其拉氏变换$(p_{ij}(t))$称为Q过程．

定义2.2.1． 称定义在$E \times E$上的矩阵$Q=(q_{ij})$为Q矩阵，如果Q满足

$$0 \leqslant q_{ij} < \infty, \quad 0 \leqslant q_i = -q_{ii} < \infty, \quad \sum_{i \in E} q_{ij} \leqslant 0 \ (i \in E) \tag{2.2.2}$$

如果还有

$$\sum_{j \in E} q_{ij} = 0 (\forall i \in E) \tag{2.2.3}$$

则称Q为保守的Q矩阵．

显然，每个可微过程的密度矩阵是Q矩阵．现在问：任给一个Q矩阵，是否存在一个 Q 过程？如果存在，那么恰好存在一个 Q 过程的充要条件是什么？这两个问题已在文献〔1〕，〔2〕和〔3〕中彻底解决．研究Q过程的实际意义在于，我们事先所知道的往往不是$(p_{ij}(t))$，而是它的密度矩阵Q．

现在回到我们的可逆过程．自然要问，对于给定的Q矩阵，既平稳又可逆的Q过程(以下简称为可逆Q过程)是否存在？如果存在，恰好存在一个的充要条件是什么？

本章只研究保守的Q矩阵．因此，以后各节恒设Q矩阵是保守的，不再随处申明．

§2.3. 可配称Q矩阵

定义2.3.1. 如果存在正分布$U=(u_i)$，使

$$u_i q_{ij}=u_j q_{ji} \quad (i,j\in E) \qquad (2.3.1)$$

成立，则称Q是可配称Q矩阵，而$U=(u_i)$叫做Q的配称分布。

由定理2.1.1.立即得到

定理2.3.1. 每一个可逆Q过程的Q矩阵是可配称的。

定义2.3.2. 对于$i,j\in E$,若存在E的有限子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，使

$$q_{ii_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_kj}\neq 0 \qquad (2.3.2)$$

则称之可达j,记为$i\rightsquigarrow j$,且称$[i,i_1,i_2,\cdots,i_k,j]$为从i到j的一条路；否则,称i不可达j,并记作$i\not\rightsquigarrow j$。若$i\rightsquigarrow j$且$j\rightsquigarrow i$,则称i与j互达，并记作$i\leftrightsquigarrow j$。若$i\not\rightsquigarrow j$且$j\not\rightsquigarrow i$，则称i与j互不达,并记作$i\not\leftrightsquigarrow j$。

定义2.3.3. 若对于任一对i，$j\in E$，$i\neq j$，要么$i\leftrightsquigarrow j$，要么$i\not\leftrightsquigarrow j$,则称$Q$为可分块$Q$矩阵.若对任一对$i,j\in E$,总有$i\leftrightsquigarrow j$,则称$Q$为既约$Q$矩阵。

设Q矩阵Q是可分块的.如果对于一切$j\in E$,$i\not\leftrightsquigarrow j$(即$i\not\leftrightsquigarrow i$)我们把$i$单独作为一类；如果有$j\in E$,使$i\leftrightsquigarrow j$,我们把$i$和$j$归入同一类．这样,我们就把$E$分成$|D|$个($D$为有限集或可列集,$|D|$为集$D$的基数)互不相交的非空子集$E_l(l\in D)$之并,使得对于$i\in E_{l_1},j\in E_{l_2}$，$i\neq j$,总有$i\leftrightsquigarrow j$,倘若$l_1=l_2$；或$i\not\leftrightsquigarrow j$,倘若$l_1\neq l_2$。我们把$Q^{(l)}=(q_{ij})$ $(i,j\in E_l)$叫做Q的既约子块。Q既约当且仅当D只包含一个元素.

定义2.3.4. 设$Q^{(l)}$为Q的既约子块,若$[i,i_1,\cdots,i_k,j]$为E_l

中的从i到j的一条路，则

$$r_{ii_1i_2\cdots i_k\,j}=\frac{q_{ji_k}q_{i_ki_{k-1}}\cdots q_{i_1i}}{q_{ii_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_kj}} \tag{2.3.3}$$

叫做从i到j的路$[i,i_1,i_2,\cdots,i_k,j]$的示性数. 若对于从i到j的一切路都有相同的示性数，则称从i到j是可示性的，并把这个共同值记为$r_{ij}{}^{(l)}$,称之为从i到j的示性数.若对于E_l中的任一序对(i,j)，从i到j都是可示性的，则称$Q^{(l)}$为可示性的. $R^{(l)}=(r_{ij}{}^{(l)})$称为$Q^{(l)}$的示性矩阵.

如果$Q^{(l)}$的阶数为1,即E_l仅含一个元素i,若$q_{ii}\neq 0$，则$r_{ii}{}^{(l)}=1$；否则,$r_{ii}{}^{(l)}$无定义,但为方便,此时我们约定$r_{ii}{}^{(l)}=1$,并且还称$Q^{(l)}$为可示性的.

定义2.3.5. 设$Q^{(l)}$为Q的既约子块，若

$$\pi_j{}^{(l)}=(\sum_{i\in E_l}r_{ij}{}^{(l)})^{-1}>0\quad(j\in E_l) \tag{2.3.4}$$

$$\sum_{j\in E_l}\pi_j{}^{(l)}=1 \tag{2.3.5}$$

$$\pi_iq^{(l)}{}_{ij}=\pi_j{}^{(l)}q_{ji}\quad(i,j\in E_l) \tag{2.3.6}$$

则称$Q^{(l)}$为完全可示性的，$(\pi_i{}^{(l)})$称为它的示性分布族.

定义2.3.6. 设Q为可分块Q矩阵,若Q的每一个既约子块$Q^{(l)}=(q_{ij},\ i,\ j\in E_l),(l\in D)$都是完全可示性的，则称$Q$为完全可示性$Q$矩阵. $Q^{(l)}$的示性分布$(\pi_i{}^{(l)},\ i\in E_l)$的全体$\{(\pi_i{}^{(l)},i\in E_l)\},(l\in D)$叫做$Q$的示性分布族.

定理2.3.2. Q是可配称Q矩阵的充要条件是：它是完全可示性的.

证明 i) 充分性：

设Q是完全可示性的，任选$v_l>0(l\in D)$，$\sum_{l\in D}v_l=1$，并令

$$u_i=v_l\pi_i^{(l)}\quad(i\in E_l,\ l\in D)\tag{2.3.7}$$

显见(u_i)为一个正分布，且

$$u_iq_{ij}=u_jq_{ji}\quad(i,\ j\in E)\tag{2.3.8}$$

于是Q是可配称的，且以(u_i)为其配称分布。

ii) 必要性：

设Q是可配称的，即存在正分布(u_i)，使

$$u_iq_{ij}=u_jq_{ji}\quad(i,\ j\in E)\tag{2.3.9}$$

于是，对于任一对$i,j\in E$，有

$$q_{ij}=0\iff q_{ji}=0\tag{2.3.10}$$

由此易证Q是可分块的。阶数为1的子块显然是完全可示性的。对于阶数$\geqslant2$的子块$Q^{(l)}=(q_{ij},\ i,\ j\in E_l)$，应有

$$u_iq_{ij}=u_jq_{ji}\quad(i,\ j\in E_l)\tag{2.3.11}$$

设$[i,\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k,\ j]$是一条从$i$到$j$的路（由于$i\leadsto j$，从$i$到$j$的路一定存在），于是

$$\begin{aligned}r_{ii_1i_2\cdots i_kj}&=\frac{q_{ji_k}q_{i_ki_{k-1}}\cdots q_{i_1i}}{q_{ii_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_kj}}\\&=\frac{q_{i_1i}}{q_{ii_1}}\cdot\frac{q_{i_2i_1}}{q_{i_1i_2}}\cdot\cdots\cdot\frac{q_{ji_k}}{q_{i_kj}}\\&=\frac{u_i}{u_{i_1}}\cdot\frac{u_{i_1}}{u_{i_2}}\cdot\cdots\cdot\frac{u_{i_k}}{u_j}\\&=\frac{u_i}{u_j}\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

故$r_{ii_1i_2\cdots i_kj}$的值不依赖于从i到j的路的选择，所以$Q^{(l)}$是可示性的，并且它的示性矩阵$(r_{ij}^{(l)})$的元素

$$r_{ij}^{(l)}=\frac{u_i}{u_j}>0 \quad (i,\ j\in E_l) \tag{2.3.13}$$

而且

$$\sum_{i\in E_l} r_{ij}^{(l)}=\sum_{i\in E_l}\frac{u_i}{u_j}=\frac{\sum\limits_{i\in E_l}u_i}{u_j}<\infty \tag{2.3.14}$$

$$\pi_j^{(l)}=(\sum_{i\in E_l} r_{ij}^{(l)})^{-1}=\frac{u_j}{\sum\limits_{i\in E_l}u_i}>0 \tag{2.3.15}$$

$$\sum_{j\in E_l}\pi_j^{(l)}=\frac{\sum\limits_{j\in E_l}u_j}{\sum\limits_{i\in E_l}u_i}=1. \tag{2.3.16}$$

由

$$\pi_j^{(l)}=\frac{u_j}{\sum\limits_{i\in E_l}u_i} \tag{2.3.17}$$

及(2.3.9)知

$$\pi_i^{(l)}q_{ij}=\pi_j^{(l)}q_{ji},\ (i,\ j\in E) \tag{2.3.18}$$

所以$Q^{(l)}$是完全可示性的．于是Q是完全可示性Q矩阵．定理的证明遂告完成。

定理2.3.3. 设Q是可配称的Q矩阵，则Q的配称分布唯一的充要条件是：它是既约的．在Q的配称分布唯一时，Q的配称分布就是Q的示性分布．在Q的配称分布不唯一时，Q就有无穷多个配称分布，它们可用如下方法全部构造出来，任选$v_l(l\in D)$，$\sum\limits_{l\in D}v_l=1$，则

$$u_i = v_l \pi_i^{(l)} \quad (i \in E_l,\ l \in D)$$

是Q的一个配称分布。

证明 注意定理2.3.2的证明的前半部分，立得我们的定理。

对于一个给定的Q矩阵，如何判定它是否可配称？在可配称时，如何求出它的配称分布？定理2.3.2和定理2.3.3告诉我们，只需考虑它的每一个既约子块便已足够。指标集E_l只含有一个元素的情形是不足道的，指标集E_l含有有限多个元素的情形也好办，因此，我们只考虑指标集含有可列无穷多个元素的情形。为叙述方便，无妨设$E_l = E$，即只考虑既约Q矩阵。

定理2.3.4. 设Q是一个完全可示性的既约Q矩阵，它的示性矩阵为(r_{ij})，配称分布为(u_i)，则我们有

$$0 < r_{ij} < \infty \quad (i, j \in E) \tag{2.3.19}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ji}} \quad (i, j \in E) \tag{2.3.20}$$

$$r_{ik}\, r_{kj} = r_{ij} \quad (i, j \in E) \tag{2.3.21}$$

$$\sum_i r_{ij} < \infty \quad (j \in E) \tag{2.3.22}$$

$$u_j = \left(\sum_i r_{ij}\right)^{-1}. \quad (j \in E) \tag{2.3.23}$$

证明 由定理2.3.2的证明显见本定理成立。

如果$q_{ij} > 0$ $(i, j \in E)$，则示性矩阵R可由Q围绕对角线翻除而得到：

$$r_{ij} = \frac{q_{ji}}{q_{ij}} \quad (i, j \in E) \tag{2.3.24}$$

或用矩阵符号形式地写成

$$R = Q^T \div Q \tag{2.3.25}$$

此处Q^T表Q之转置，而$\div$号表示逐元相除。

同离散参数情形类似，我们也有

定理2.3.5. (翻除判别法)设Q是一个元素全部大于零的Q矩阵，R是由(2.3.24)所得的翻除矩阵，则Q可配称的充要条件是R满足(2.3.19)～(2.3.22)。

证明 由定理2.3.2和定理2.3.3知条件是必要的.往证充分性.取定$i_0 \in E$，并令

$$u_i = r_{ii_0} / (\sum_{k \in E} r_{ki_0}) \qquad (2.3.26)$$

则由(2.3.19)和(2.3.22)知(u_i)是一个正分布。由(2.3.21)和(2.3.24)知

$$\frac{q_{ji}}{q_{ij}} = r_{ij} = \frac{r_{ii_0}}{r_{ji_0}} = \frac{u_i}{u_j} \qquad (2.3.27)$$

故

$$u_i q_{ij} = u_j q_{ji}$$

即Q是可配称的。定理证毕。

注1° (2.3.26)表明，(u_i)可从R的任一列归一化得到。

2° 由(2.3.20)知

$$u_i = \frac{r_{ii_0}}{\sum_k r_{ki_0}} = (\sum_k r_{ki_0} r_{i_0 i})^{-1} = (\sum_k r_{ki})^{-1}$$

从而(2.3.26)与(2.3.26)一致。

我们注意，如果Q的非对角线上的元素全部大于零，则对角线上的元素也都大于零。如果非对角线上有零元素，则定理2.3.5失效。此时该如何处理呢？为此先引入

定义2.3.7. 设$A=(a_{ij})$是非负矩阵，令

$$b_{ij}=\begin{cases} a_{ji}/a_{ij} & a_{ij}>0 \\ +\infty & a_{ij}=0,\ a_{ji}>0 \quad (i\neq j) \\ * & a_{ij}=a_{ji}=0 \end{cases}$$

$$b_{ii}=1. \tag{2.3.28}$$

此处 * 叫做不定元，形式地写成

$$B(A)=A^T\div A=(b_{ij}) \tag{2.3.29}$$

$B(A)$叫做A的翻除似阵。

在实际中，我们可以形式地使用翻除似阵来求既约矩阵Q的配称分布。对于给定的Q，先不管它是否可配称，按（2.3.28）算出$B(Q)$，在不定元*处按照(2.3.19)～(2.3.21)的条件填空。若所有的*处均已填满，所得的矩阵满足(3.3.19)～(2.3.22)，则可用(2.3.23)算出(u_i)，然后检验(u_i)是否满足(2.3.1)。

例[8] 设$\theta>0$。

$$q_{ij}=\begin{cases} je^{-\theta} & j=i+1 \\ -[j+(j+1)e^{-\theta}] & j=i \\ j+1 & j=i-1 \end{cases} \tag{2.3.30}$$

即

$$Q=\begin{pmatrix} -e^{-\theta} & e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -(1+2e^{-\theta}) & 2e^{-\theta} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -(2+3e^{-\theta}) & 3e^{-\theta} & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 3 & -(3+4e^{-\theta}) & 4e^{-\theta} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

显然Q是既约的。它的翻除似阵是

$$B(Q)=\begin{pmatrix} 1 & e^{\theta} & & * \\ e^{-\theta} & 1 & e^{\theta} & \\ & e^{-\theta} & 1 & e^{\theta} \\ * & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

依照 (2.3.19)～(2.3.21) 的要求，把*处填上（这里使用条件(2.3.21)，即R的各行(列)成比例)，得到

$$R=\begin{pmatrix} 1 & e^{\theta} & e^{2\theta}\cdots\cdots \\ e^{-\theta} & 1 & e^{\theta}\cdots\cdots \\ e^{-2\theta} & e^{-\theta} & 1\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

这个R显然满足(2.3.19)～(2.3.22)，再由(2.3.23)得

$$u_j=(\sum_i r_{ij})^{-1}=(1-e^{-\theta})e^{-j\theta} \qquad (2.3.31)$$

容易验证

$$u_i q_{ij}=u_j q_{ji}$$

故Q可配称并以(u_i)为配称分布。

现在，命

$$p_{ij}^{(0)}(\lambda)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \qquad (i,j\in E) \quad (2.3.32)$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}p_{kj}^{(n)}(\lambda) \qquad (i,j\in E) \quad (2.3.33)$$

$$p_{ij}^{\min}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}(\lambda) \qquad (i,j\in E) \quad (2.3.34)$$

称$(p_{ij}^{\min}(\lambda))$为最小解。

定理2.3.6. 设Q是可配称的，(u_i)是它的一个配称分布，则

$$u_i p_{ij}^{\min}(\lambda)=u_j p_{ji}^{\min}(\lambda) \qquad (i,j\in E,\ \lambda>0) \quad (2.3.35)$$

反之，若(2.3.35)成立，则Q可配称。

证明 熟知，由(2.3.32)和(2.3.33)可推出(2.3.34)，而且

$$p_{ij}^{(0)}(\lambda)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \tag{2.3.36}$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{k\neq j}\frac{p_{ik}^{(n)}(\lambda)q_{kj}}{\lambda+q_j} \tag{2.3.37}$$

令

$$\widetilde{p}_{ij}^{(n)}(\lambda)=p_{ji}^{(n)}(\lambda)\frac{u_j}{u_i} \tag{2.3.38}$$

$$\widetilde{p}_{ij}^{\min}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}(\lambda) \tag{2.3.39}$$

从而

$$\widetilde{p}_{ij}^{\min}(\lambda)=p_{ji}^{\min}(\lambda)\cdot\frac{u_j}{u_i} \tag{2.3.40}$$

当$n=0$时，

$$\widetilde{p}_{ij}^{(0)}(\lambda)=p_{ji}^{(0)}(\lambda)\frac{u_j}{u_i}=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\cdot\frac{u_j}{u_i}$$

$$=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}=p_{ij}^{(0)}(\lambda) \tag{2.3.41}$$

假若

$$\widetilde{p}_{ij}^{(n)}(\lambda)=p_{ij}^{(n)}(\lambda) \tag{2.3.42}$$

则

$$\widetilde{p}_{ij}^{(n+1)}(\lambda)=p_{ji}^{(n+1)}(\lambda)\cdot\frac{u_j}{u_i} \qquad (\text{由}(2.3.38))$$

$$=\sum_{k\neq j}\frac{q_{jk}p_{ki}^{(n)}(\lambda)}{\lambda+q_j}\cdot\frac{u_j}{u_i} \qquad (\text{由}(2.3.33))$$

$$= \sum_{k \neq j} \frac{q_{jk} \widetilde{p}_{ki}^{(n)}(\lambda)}{\lambda + q_j} \cdot \frac{u_j}{u_i} \quad (\text{由}(2.3.42))$$

$$= \sum_{k \neq j} \frac{q_{jk} p_{ik}^{(n)}(\lambda)}{\lambda + q_j} \cdot \frac{u_i}{u_k} \cdot \frac{u_j}{u_i} (\text{由}(2.3.38))$$

$$= \sum_{k \neq j} \frac{p_{ik}^{(n)}(\lambda) q_{kj}}{\lambda + q_j}$$

$$= p_{ij}^{(n+1)}(\lambda) \quad (\text{由}(2.3.37)) \qquad (2.3.43)$$

于是对于任一非负整数 n，有

$$\widetilde{p}_{ij}^{(n)}(\lambda) = p_{ij}^{(n)}(\lambda) \qquad (i, j \in E) \quad (2.3.44)$$

从而

$$\widetilde{p}_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) \qquad (2.3.45)$$

由(2.3.40)和(2.3.45)得

$$p_{ij}^{\min}(\lambda) = p_{ji}^{\min}(\lambda) \cdot \frac{u_j}{u_i} \qquad (2.3.46)$$

即

$$u_i p_{ij}^{\min}(\lambda) = u_j p_{ji}^{\min}(\lambda) \qquad (2.3.47)$$

于是定理的前一项断言得证，后一项断言是显然的。

§2.4. 可逆Q过程存在准则

定义2.4.1. 若方程

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda u_i - \sum_{j \in E} q_{ij} u_j = 0 & (\lambda > 0) \\ 0 \leqslant u_i \leqslant 1 & (i \in E) \end{array}\right\} \qquad (2.4.1)$$

无非零解，则称Q是零流出的。

定理2.4.1. 可逆 Q 过程存在的充要条件是：Q是可配称的并且下列两条之一成立。

i）Q是既约零流出的；

ii）Q的每一子块都不是零流出的。

证明 （Ⅰ）必要性：

设有可逆Q过程 $(p_{ij}(t))$，则由定理2.3.1知Q是可配称的。下面分两种情况讨论。

1° Q是零流出的。

若Q非既约，则由 Q 是零流出的可知，Q的每一块 $Q^{(l)}=(q_{ij},$ $i, j\in E_l)(l\in D)$也是零流出的，而且D包含两个以上的元素。

取l_1，$l_2\in D$，$l_1\neq l_2$，注意这时Q过程唯一知

$$p_{ij}(t)=0 \qquad (i\in E_{l_1}, j\in E_{l_2}) \quad (2.4.2)$$

从而

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=0 \qquad (i\in E_{l_1}, j\in E_{l_2}) \quad (2.4.3)$$

故$(p_{ij}(t))$无平稳分布。但这与$(p_{ij}(t))$可逆矛盾。所以Q必是既约的。

2° Q 不是零流出的。

若存在$l\in D$，使Q的一块$Q^{(l)}=(q_{ij}, i, j\in E_l)$是零流出的，则由$Q$不是零流出的可知$E_l\neq E$，于是

$$p_{ij}(t)=p_{ij}^{min}(t) \qquad (i, j\in E_l) \qquad (2.4.4)$$

且

$$\sum_{j\in E_l} p_{ij}(t)=\sum_{j\in E_l} p_{ij}^{min}(t)=1 \qquad (2.4.5)$$

从而

$$p_{ij}(t)=0 \qquad (i\in E_l, j\overline{\in} E_l) \qquad (2.4.6)$$

所以

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=0 \qquad (i\in E_l, j\overline{\in} E_l) \qquad (2.4.7)$$

所以$(p_{ij}(t))$无平稳分布，但这与$(p_{ij}(t))$可逆矛盾，从而Q的每一块都不是零流出的。

（Ⅱ）充分性：

设Q是可配称的，下面分两种情况讨论。

1° Q是既约零流出的。

以(u_i)表示Q的一个配称分布，于是由定理2.3.6知

$$u_i p_{ij}^{\min}(\lambda)=u_j p_{ji}^{\min}(\lambda) \qquad (2.4.8)$$

由Q是既约零流出的知

$$p_{ij}^{\min}(t)\neq 0 \qquad (i,\ j\in E) \qquad (2.4.9)$$

$$p_{ij}(t)=p_{ij}^{\min}(t) \qquad (i,\ j\in E) \qquad (2.4.10)$$

由定理2.1.2，(2.4.8)，(2.4.9)和(2.4.10)知$(p_{ij}(t))$可逆。

2°. Q 的每一子块都不是零流出的。

令

$$x_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \qquad (i\in E) \qquad (2.4.11)$$

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)u_j}{\lambda\sum_{k\in E} x_k(\lambda)u_k}(i,j\in E) \quad (2.4.12)$$

往证$(p_{ij}(\lambda))$是可逆的。

由Q的每一子块都不是零流出的知

$$x_i(\lambda)>0 \qquad (i\in E,\ \lambda>0) \qquad (2.4.13)$$

易证

$$\left.\begin{array}{l}\lambda x_i(\lambda)-\sum\limits_{j\in E} q_{ij}x_j(\lambda)=0,\ \ \lambda>0\\ 0<x_i(\lambda)\leqslant 1\end{array}\right\}\ (i\in E) \qquad (2.4.14)$$

$$x_i(\lambda)-x_i(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\mu)x_j(\lambda)=0 \qquad (2.4.15)$$

$$\lambda,\ \mu>0, \qquad (i\in E)$$

令$\xi_j(\lambda)=x_j(\lambda)u_j$，于是由(2.4.14)，(2.4.15)以及定理2.3.3知

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\xi_j(\lambda)-\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)q_{ij}=0,\ \lambda>0\\&\xi_j(\lambda)\geqslant 0,\ \sum_{j\in E}\xi_j(\lambda)<\infty\end{aligned}\right\}\quad (j\in E)\qquad (2.4.16)$$

及

$$\xi_j(\lambda)-\xi_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)p_{ij}^{\min}(\mu)=0,\ \lambda,\ \mu>0$$

$$(j\in E) \qquad (2.4.17)$$

于是由(2.4.13)及〔5〕知(2.4.12)决定的$(p_{ij}(\lambda))$是一个Q过程，并且

$$p_{ij}(\lambda)\doteqdot 0 \qquad (\lambda>0,\ i,\ j\in E)\ (2.4.18)$$

$$u_ip_{ij}(\lambda)=u_jp_{ji}(\lambda) \qquad (\lambda>0,\ i,\ j\in E)\ (2.4.19)$$

故由定理2.1.2知$(p_{ij}(\lambda))$是可逆的。

定理的证明遂告完成。

§2.5. 可逆Q过程的一个充分性判据

先看最小Q过程的可逆性。

定理2.5.1. 最小Q过程可逆的充要条件是：

(i) Q过程唯一；

(ii) 矩阵Q既约可配称

同时成立。

证明 (Ⅰ)必要性：设最小Q过程$(p_{ij}^{\min}(t))$可逆，则由(2.1.2)知(i)成立。由定理2.3.1知Q可配称。我们说，Q还是既约的。否

则，存在i，$j\in E$，使

$$p_{ij}^{\min}(t)=0, \tag{2.5.1}$$

于是

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{\min}(t)=0. \tag{2.5.2}$$

这与可逆过程$(p_{ij}^{\min}(t))$的平稳性相矛盾。

（Ⅱ）充分性：因为Q是既约的，故由所设条件及定理2.4.1的i）知可逆Q过程存在。并且这个可逆Q过程就是最小Q过程。定理得证。

下面给出Q过程唯一的一个充分性条件。

定理2.5.2. 设有正分布(u_i)，使得

$$\text{(i)}\quad \sum_{i\in E} u_i q_{ij}=0 \tag{2.5.3}$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{j\in E} u_j q_j<\infty \tag{2.5.4}$$

则由Q和U唯一决定一个可逆Q过程，它即是最小Q过程。

注：条件(ii)有很明确的概率意义。一个齐次可列马尔可夫过程平均跳跃频率有限的充要条件是(ii)成立。详见〔4〕。

证明 设 $P^{\min}(t)=(p_{ij}^{\min}(t))$是$Q=(q_{ij})$所决定的最小$Q$过程，则

$$\frac{d}{dt}P^{\min}(t)=QP^{\min}(t)=P^{\min}(t)Q \tag{2.5.5}$$

并且

$$\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t)\leqslant 1 \tag{2.5.6}$$

由(2.5.3)知

$$\sum_{j\in E}\sum_{k\in E} u_k q_{kj} p_{ji}^{\min}(t)=0 \tag{2.5.7}$$

即

$$\sum_{k\in E} u_k(\sum_{j\in E} q_{kj}p_{ji}^{\min}(t))=0 \tag{2.5.8}$$

由(2.5.5)和(2.5.8)得

$$\sum_{k\in E} u_k \frac{d}{dt} p_{ki}^{\min}(t)=0 \tag{2.5.9}$$

又因为

$$\left|\frac{\Delta p_{ki}^{\min}(t)}{\Delta t}\right| \leqslant q_k \text{ [6]} \tag{2.5.10}$$

所以由(2.5.4)，(2.5.9)和(2.5.10)得

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{k\in E} u_k p_{ki}^{\min}(t)\Big)=\sum_{k\in E} u_k \frac{d}{dt} p_{ki}^{\min}(t)=0 \tag{2.5.11}$$

因此

$$\sum_{k\in E} u_k p_{ki}^{\min}(t)=\mathrm{w}_i \text{ （常数）} \qquad (i\in E) \tag{2.5.12}$$

令$t\to 0$，依控制收敛定理得

$$\mathrm{w}_i=u_i \qquad (i\in E) \tag{2.5.13}$$

由此可见

$$\sum_{i\in E} p_{ji}^{\min}(t)=1$$

此即表明Q过程唯一，定理得证。

下面给出可逆Q过程的一个唯一性判据。这个判据在应用中是比较方便的。

定理2.5.3. 设 $Q=(q_{ij})$ 是一个既约Q矩阵。假定存在一个正分布$U=(u_i)$，使得

(i) $u_i q_{ij}=u_j q_{ji} \qquad (i,\ j\in E) \qquad (2.5.14)$

(ii) $\sum_{j\in E} u_j q_j<\infty \qquad (2.5.15)$

则由Q和U唯一决定一个可逆Q一过程$(p_{ij}(t))$，它以Q为密度矩阵，以U为平稳分布。并且这个可逆过程就是最小Q过程。

证明 由(2.5.14)和(2.2.3)得

$$\sum_{i\in E} u_i q_{ij} = \sum_{i\in E} u_j q_{ji} = u_j \sum_{i\in E} q_{ji} = 0 \qquad (2.5.16)$$

故由定理2.5.2知Q过程唯一。设为$(p_{ij}(t))$，然后由(2.5.14)和定理2.5.1知$(p_{ij}(t))$可逆。

例 考虑第三节中的例子。

$$q_{ij} = \begin{cases} je^{-\theta} & j=i+1 \\ -[j+(j+1)e^{-\theta}], & j=i \\ j+1 & j=i-1 \end{cases} \quad (i,j\in E) \qquad (2.5.17)$$

由本章§2.3中知，Q 既约可配称。配称分布是

$$u_j = (1-e^{-\theta})e^{-j\theta} \qquad (j\in E) \qquad (2.5.18)$$

因为

$$\sum_{j\in E} u_j q_j = \sum_{j\in E} (1-e^{-\theta})e^{-j\theta}[j+(j+1)e^{-\theta}]$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} je^{-j\theta} = (1-e^{-\theta})^{-2}e^{-\theta} < \infty \qquad (2.5.19)$$

故定理2.5.3的条件满足。因而Q唯一决定一个可逆Q过程。

在本节之末，我们给出可逆Q过程的有趣的结果。

定理2.5.4. 设Q可配称，并以(u_i)为配称分布。又设$(p_{ij}(t))$是唯一的既满足柯氏向前微分方程组，又满足$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = u_j$的$Q$过程。那么，以$(u_i)$为平稳分布的可逆$Q$过程唯一，它就是$(p_{ij}(t))$。

证明 令

$$\tilde{p}_{ij}(t) = \frac{u_j}{u_i} p_{ji}(t) \qquad (2.5.20)$$

$$\tilde{p}_{ij}(0)=\delta_{ij},\ \tilde{p}_{ij}(t)\geqslant 0 \tag{2.5.21}$$

$$\sum_{j\in E}\tilde{p}_{ij}(t)=\sum_{j\in E}\frac{u_j}{u_i}p_{ji}(t)=\frac{1}{u_i}\sum_{j\in E}u_jp_{ji}(t)$$

$$=\frac{u_i}{u_i}=1 \tag{2.5.22}$$

$$\tilde{p}_{ij}(t+s)=\frac{u_j}{u_i}p_{ji}(t+s)$$

$$=\frac{u_j}{u_i}\sum_{k\in E}p_{jk}(t)p_{ki}(s)$$

$$=\sum_{k\in E}\left(\frac{u_j}{u_k}p_{jk}(t)\right)\left(\frac{u_k}{u_i}p_{ki}(s)\right)$$

$$=\sum_{k\in E}\tilde{p}_{ik}(s)\tilde{p}_{kj}(t) \tag{2.5.23}$$

$$\tilde{p}_{ij}'(0)=\frac{u_j}{u_i}q_{ji}=q_{ij} \tag{2.5.24}$$

$$\tilde{p}_{ij}'(t)=\frac{u_j}{u_i}p_{ji}'(t)$$

$$=\frac{u_j}{u_i}\sum_{k\in E}q_{jk}p_{ki}(t)$$

$$=\frac{1}{u_i}\sum_{k\in E}u_kq_{kj}p_{ki}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}\tilde{p}_{ik}(t)q_{kj} \tag{2.5.25}$$

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{p}_{ij}(t)=\frac{u_j}{u_i}\lim_{t\to\infty}p_{ji}(t)=u_j \tag{2.5.26}$$

因此，$(\tilde{p}_{ij}(t))$ 也是一个既满足柯氏向前微分方程组、又满足

$\lim_{t\to\infty}\widetilde{p}_{ij}(t)=u_j$的$Q$过程。由定理的假设条件知

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=p_{ij}(t) \tag{2.5.27}$$

由(2.5.20)，(2.5.27)和(2.5.26)即知$(p_{ij}(t))$可逆。定理得证。

系。设Q既约可配称，以(u_i)为配称分布，又设$(p_{ij}(t))$是唯一的满足柯氏向前微分方程组的Q过程，并且$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=u_j$。那么，唯一可能的可逆$Q$过程是$(p_{ij}(t))$。

§2.6. 可逆单流出Q过程

在讨论本节的主要结果之前，我们先建立一条一般性定理。这条定理以后将反复用到。

定理2.6.1. 设$(p_{ij}(t))$为一Q过程，它是可逆过程，则对某一对$i, j\in E$

$$p_{ij}'(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t) \tag{2.6.1}$$

成立的充要条件是

$$p_{ji}'(t)=\sum_{k\in E}p_{jk}(t)q_{ki} \tag{2.6.2}$$

证明 以(u_i)表可逆Q过程$(p_{ij}(t))$的平稳分布，则

$$p_{ji}'(t)=\left(\frac{u_i}{u_j}p_{ij}(t)\right)'$$

$$=\frac{u_i}{u_j}p_{ij}'(t)=\frac{u_i}{u_j}\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t)$$

$$=\frac{u_i}{u_j}\sum_{k\in E}\frac{u_k}{u_i}q_{ki}\cdot\frac{u_j}{u_k}p_{jk}(t)$$

$$= \sum_{k\in E} p_{jk}(t)q_{ki}.$$

于是由(2.6.1)推出(2.6.2)。反之亦然。

定理2.6.1表明，每一个可逆Q过程(Q保守)同时满足柯氏向前、向后微分方程组。应当指出，这个定理并不需要假定Q保守，它对于非保守情形也是对的。

作为研究可逆Q过程唯一性准则的准备，本节研究一类特殊的可逆Q过程。

定义2.6.1. 对于Q矩阵$Q=(q_{ij})$，如果方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda u_i - \sum_{j\in E} q_{ij}u_j = 0 \quad (\lambda>0) \\ &0\leqslant u_i\leqslant 1 \qquad\qquad\quad (i\in E) \end{aligned}\right\} \tag{2.6.3}$$

只有一个线性独立的非零解，则称Q为单流出的，这时称Q过程为单流出Q过程。

本节的目的是，对任给的一个单流出Q矩阵，给出可逆单流出Q过程存在的充要条件，并且在可逆单流出Q过程存在时把它从全部单流出Q过程中区分出来。

定理2.6.2. 任意满足柯氏向前微分方程组的单流出Q过程有表现

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \frac{x_i(\lambda)\xi_j(\lambda)}{\lambda \sum_{k\in E}\xi_k(\lambda)} \tag{2.6.4}$$

其中$(p_{ij}^{\min}(\lambda))$为最小解，而

$$x_i(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \qquad (i\in E) \tag{2.6.5}$$

是(2.6.3)的唯一(精确到常数因子)解，而$\xi_j(\lambda)$满足

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\xi_j(\lambda)-\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)q_{ij}=0\\&\xi_j(\lambda)\geqslant 0,\ \sum_{j\in E}\xi_j(\lambda)<\infty\end{aligned}\right\}\tag{2.6.6}$$

以及

$$\xi_j(\lambda)-\xi_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)p_{ij}^{min}(\mu)=0$$

$$(\lambda>0,\ \mu>0)\tag{2.6.7}$$

$$\xi_j(\lambda)\neq 0\qquad (j\in E,\ \lambda>0)\tag{2.6.8}$$

证明　见〔5〕。

下面是可逆单流出Q过程的存在准则。

定理2.6.3.　设Q是单流出Q矩阵，则存在可逆单流出Q过程的充要条件是Q为既约可配称矩阵。

证明　由定理2.4.1证明的最后一部分可见，如果Q是既约可配称的单流出矩阵，则

$$\begin{aligned}p_{ij}(\lambda)&=p_{ij}^{min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)u_j}{\lambda\sum_{k\in E}x_k(\lambda)u_k}\\&=p_{ij}^{min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)\xi_j(\lambda)}{\lambda\sum_{k\in E}\xi_k(\lambda)}\end{aligned}\tag{2.6.9}$$

其中$\xi_j(\lambda)=u_jx_j(\lambda)$，$(j\in E)$便是一个可逆的单流出$Q$过程.从而条件是充分的．往证必要性：

因为Q单流出，故可找到$l_1\in D$，$i\in E_{l_1}$使

$$\sum_{j\in E_{l_1}}p_{ij}^{min}(t)\neq 1\tag{2.6.10}$$

如果Q不是既约的，则存在$l_2\in D$，$l_2\neq l_1$。下面分两种情况考虑：

（i）若

$$\sum_{j\in E_{l_2}}p_{ij}^{min}(t)\neq 1\qquad (i\in E_{l_2})\tag{2.6.11}$$

则易证这与Q为单流出矛盾。

(ii) 若 $\sum_{j\in E_{l_2}} p_{ij}^{\min}(t)=1 \qquad (i\in E_{l_2}) \qquad (2.6.12)$

则对于任一可逆单流出Q过程$(p_{ij}(t))$，有

$$p_{ij}(t)=0 \qquad (i\in E_{l_2}, j\bar{\in} E_{l_2}) \qquad (2.6.13)$$

从而

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=0 \qquad (i\in E_{l_2}, l\bar{\in} E_{l_2}) \qquad (2.6.14)$$

这与$(p_{ij}(t))$可逆矛盾，故Q是既约的。Q的可配称性则是显然的。定理得证。

定理2.6.4. 设Q是单流出矩阵，则至多存在一个可逆单流出Q过程。

证明 由定理2.6.3，我们只需证明当Q为既约可配称时，恰好存在一个可逆单流出Q过程。我们已经有了一个可逆单流出Q过程(2.6.9)。假设我们有另一个可逆单流出Q过程$(\widetilde{p}_{ij}(\lambda))$，则由定理2.6.1和定理2.6.2知，

$$\widetilde{p}_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)\widetilde{\xi}_j(\lambda)}{\lambda\sum_{k\in E}\widetilde{\xi}_k(\lambda)}$$

$$(i,j\in E,\lambda>0) \qquad (2.6.15)$$

其中$\widetilde{\xi}_j(\lambda)(j\in E)$满足方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\widetilde{\xi}_j(\lambda)-\sum_{j\in E}\widetilde{\xi}_j(\lambda)q_{ij}=0\\&\widetilde{\xi}_j(\lambda)\geqslant 0,\xi_j(\lambda)\neq 0,\ \sum_{j\in E}\widetilde{\xi}_j(\lambda)<\infty\end{aligned}\right\} \qquad (2.6.16)$$

及

$$\widetilde{\xi}_j(\lambda)-\widetilde{\xi}_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)p_{ij}^{\min}(\mu)=0$$

$$\lambda>0,\ \mu>0 \qquad (2.6.17)$$

由上式知，当$\lambda\downarrow 0$时$\widetilde{\xi}_j(\lambda)\downarrow$. 故可令

$$\widetilde{\xi}_j=\lim_{\lambda\to 0}\widetilde{\xi}_j(\lambda) \qquad (2.6.18)$$

在(2.6.17)的两端命$\lambda\to 0$，并把μ换作λ，得

$$\widetilde{\xi}_j(\lambda)=\widetilde{\xi}_j-\lambda\sum_{i\in E}\widetilde{\xi}_i p_{ij}^{\min}(\lambda) \qquad (2.6.19)$$

$$\sum_{k\in E}\widetilde{\xi}_k(\lambda)=\sum_{k\in E}\widetilde{\xi}_k-\sum_{i\in E}\widetilde{\xi}_i(1-x_i(\lambda))$$

$$=\sum_{i\in E}\widetilde{\xi}_i x_i(\lambda) \qquad (2.6.20)$$

由于过程$(\widetilde{p_{ij}}(\lambda))$平稳，故

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\widetilde{p_{ij}}(\lambda)=u_j \qquad (2.6.21)$$

由$\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\, p_{ij}^{\min}(\lambda)=0$，$\lim\limits_{\lambda\to 0}x_i(\lambda)=1$，(2.6.15)和(2.6.21)知

$$\widetilde{\xi}_j=(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)u_j \qquad (2.6.22)$$

把(2.6.22)代入(2.6.19)和(2.6.20)得

$$\widetilde{\xi}_j(\lambda)=(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)u_j-\lambda\sum_{i\in E}(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)u_i p_{ij}^{\min}(\lambda)$$

$$=(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)(u_j-\lambda\sum_{i\in E}u_j p_{ji}^{\min}(\lambda))$$

$$=(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)u_j(1-\lambda\sum_{i\in E}p_{ji}^{\min}(\lambda))$$

$$=(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)u_j x_j(\lambda) \qquad (2.6.23)$$

$$\sum_{k\in E}\widetilde{\xi}_k(\lambda)=\sum_{k\in E}(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)u_kx_k(\lambda)$$

$$=(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)\sum_{k\in E}u_kx_k(\lambda) \qquad (2.6.24)$$

从而

$$\widetilde{p}_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)u_jx_j(\lambda)}{\lambda(\sum_{s\in E}\widetilde{\xi}_s)\sum_{k\in E}u_kx_k(\lambda)}$$

$$=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)u_j}{\lambda\sum_{k\in E}u_kx_k(\lambda)} \qquad (2.6.25)$$

故

$$\widetilde{p}_{ij}(\lambda)=p_{ij}(\lambda) \qquad (i,\ j\in E,\ \lambda>0) \qquad (2.6.26)$$

所以，可逆Q过程恰好一个。定理证毕。

参考文献

〔1〕 J.L.Doob, Markov chains—denumerable case, Trans, Am, Math. Soc, 58(1945), 455—473.

〔2〕 W. Feller, On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes, Trans. Am. Math. Soc. 48 (1940), 488—575, Errata, 58(1945), 474.

〔3〕 侯振挺，Q过程的唯一性准则，中国科学，2，(1974)115—130.

〔4〕 钱敏平，平稳马氏链的可逆性，北京大学学报，4(1978).

〔5〕 G.E.H. Reuter, Denumerable Markov processes, Ⅰ, J.London, Math. Soc., 34(1959), 81—91.

[6] Chung K. L. Markov chains with stationary transition probabilities, 2 nd ed. Springer, Berlin, 1967.

[7] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications New York, 1971.

[8] W. E. Brittin, B. W. Downs, X. J. Downs Lectures in theoretical physics. New York, 1961.

第三章　可逆生灭过程

侯振挺　　汪培庄　　陈木法

（长沙铁道学院）　　（北京师范大学）

本章的目的是：对于任给的一个生灭矩阵（双边生灭矩阵），从一切生灭过程（双边生灭过程）中，把可逆生灭过程（可逆双边生灭过程）区分出来。第一节研究保守的生灭过程，第二节研究非保守生灭过程，第三节研究双边生灭过程。

§3.1.　可逆生灭过程（保守情形）

矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -(a_0+b_0) & b_0 & 0 & 0\cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & 0\cdots \\ 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} a_0\geqslant 0,\ b_0>0 \\ a_i>0,\ b_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots) \end{array}\right\} \tag{3.1.2}$$

称为生灭Q矩阵。相应的Q过程称为生灭Q过程。本章头两节所研究的Q过程均指生灭Q过程。

我们注意，当且仅当 $a_0=0$时，$\sum\limits_{j\in E}q_{ij}=0$。换言之， 当且仅当$a_0=0$时，$Q$保守；当$a_0\neq 0$时，$\sum\limits_{j\in E}q_{0j}\neq 0$。称0为非保守状态。

定义3.1.1. 称非负实数列(u_i)为生灭矩阵Q的配称列，如果它满足

$$u_i q_{ij} = u_j q_{ji} \tag{3.1.3}$$

一个配称列(u_i)叫做配称分布，如果

$$u_i > 0 \quad (i \in E),\ \sum_{i \in E} u_i = 1 \tag{3.1.4}$$

定理3.1.1. 对于每一个生灭Q矩阵，必有且仅有一个（不计常数因子）配称列，它就是标准测度(μ_i)：

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0 = 1 \\ &\mu_i = \frac{b_{i-1} \cdots b_0}{a_i \cdots a_1} \qquad (i \geqslant 1) \end{aligned}\right\} \tag{3.1.5}$$

证明 容易验证(3.1.5)是Q的配称列。

反之，设(u_i)是Q的任一配称列，则有

$$u_{i-1} b_{i-1} = u_i a_i \qquad (i \geqslant 1) \tag{3.1.6}$$

于是

$$u_i = \frac{b_{i-1}}{a_i} u_{i-1} = \cdots = \frac{b_{i-1} \cdots b_0}{a_i \cdots a_1} u_0 \quad (i \geqslant 1)$$

令

$$k = u_0 \tag{3.1.7}$$

便得

$$u_i = k \mu_i \qquad (i \geqslant 0) \tag{3.1.8}$$

定理得证。

定理3.1.2. Q有配称分布的充要条件是

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i < \infty \tag{3.1.9}$$

Q的唯一可能的配称分布是(μ_i/μ) $(i \in E)$。

证明是显然的。

以上并未用到保守性条件：$a_0=0$。从现在起，假定此条件满足，我们直接引用[1]和[2]中的定义、记号和结果。

定理3.1.3. 对于任给的一个生灭矩阵Q，要么可逆生灭过程不存在，要么恰好存在一个；存在可逆生灭过程的充要条件是$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty$。详言之，在$R=+\infty$，$\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i<\infty$时，生灭过程唯一，这个唯一的$Q$过程就是最小$Q$过程，它是可逆的；在$R<\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty$时，只有满足柯氏向前微分方程组的那个唯一生灭过程

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{\xi_\lambda(i)\xi_\lambda(j)\mu_j}{\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\xi_\lambda(i)\mu_i}(i,j\in E)\qquad(3.1.10)$$

是可逆的；在其余情况下，不存在可逆生灭过程。

注意我们这里的$\xi_\lambda(i)$与[2]中的$\xi_\lambda(x_i)$表示同一个量。

证明 （Ⅰ）设$R=+\infty$。

这时生灭过程唯一，它就是$(p_{ij}^{\min}(t))$。由于Q既约，故由定理3.1.2和定理2.5.1知$(p_{ij}^{\min}(t))$可逆的充要条件是

$$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty.$$

（Ⅱ） $R<\infty$。

由[2]知，此时仅在$S<\infty$时存在满足柯氏向前微分方程组的Q过程，并且这种过程唯一，它就是

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{\xi_\lambda(i)\xi_\lambda(j)\mu_j}{\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\xi_\lambda(k)\mu_k}\qquad(3.1.11)$$

这个过程是可逆的。因为这时$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty$。故由定理3.1.2知$Q$可配称，进而由第二章定理2.3.6知$(p_{ij}^{\min}(\lambda))$可配称。从而由(3.1.11)可见$(p_{ij}(\lambda))$可配称。又

$$p_{ij}(\lambda) \geqslant p_{ij}^{\min}(\lambda) > 0 \tag{3.1.12}$$

故由定理2.1.2.知 $(p_{ij}(\lambda)$ 可逆。再注意当$R<\infty$时，$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$的充要条件是$S<+\infty$立得的前半部分。

定理的证明遂告完成。

在〔3〕，〔4〕中指出，当$R=+\infty$时，生灭过程遍历的充要条件是$x_\infty=\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$同时成立。实际上，在$R=+\infty$时，由$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$可推出$x_\infty=\infty$。因为$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$与$x_\infty<+\infty$同时成立$x_\infty$就是正则的了，这与$R=+\infty$矛盾，于是我们得到如下的改进结果：

定理3.1.4. 若$R=+\infty$，则过程遍历的充要条件是

$$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty.$$

它也可由定理3.1.3推出，因为易证，在$R=+\infty$时，最小Q过程是可逆的充要条件是过程遍历。

下面我们来讨论平稳分布和可逆Q过程之间的关系。

定理3.1.5. 若$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty$，则以$\left(u_i=\dfrac{\mu_i}{\sum_{j\in E}\mu_j}\right)$为平稳分布的$Q$过程能且只能是可逆$Q$过程。

证明 （Ⅰ.）$R=+\infty$，此时Q过程唯一。这个唯一Q过程可逆。故定理成立。

（Ⅱ）$R<\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty$。这时任一$Q$过程可表成

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\xi_\lambda(i)\frac{\sum_{k\in E}\mu_k p_{kj}^{\min}(\lambda)\alpha_k+d\xi_\lambda(j)\mu_j}{\sum_{k\in E}\alpha_k(1-\xi_\lambda(k)\mu_k+\lambda d\sum_{k\in E}\xi_\lambda(k)\mu_k} \tag{3.1.13}$$

由〔5〕知，其平稳分布为

$$\frac{\sum_{k\in E}\mu_k\Gamma_{kj}\alpha_k+d\mu_j}{\sum_{k\in E}\alpha_k\sum_{l\in E}\Gamma_{kl}\mu_k+d\sum_{k\in E}\mu_k}. \tag{3.1.14}$$

如果

$$\frac{\sum_{k\in E}\mu_k\Gamma_{kj}\alpha_k+d\mu_j}{\sum_{k\in E}\mu_k\sum_{l\in E}\Gamma_{kl}\alpha_k+d\sum_{k\in E}\mu_k}=\frac{\mu_j}{\sum_{k\in E}\mu_k} \qquad (3.1.15)$$

于是

$$(\sum_{k\in E}\mu_k\Gamma_{kj}\alpha_k)(\sum_{k\in E}\mu_k)=\mu_j(\sum_{k\in E}\mu_k\sum_{l\in E}\Gamma_{kl}\alpha_k) \qquad (3.1.16)$$

但由定理2.3.6和定理3.1.2知

$$\mu_k\Gamma_{kj}=\mu_j\Gamma_{jk} \qquad (3.1.17)$$

从而

$$\mu_j\sum_{k\in E}\Gamma_{jk}\alpha_k=\mu_j(\sum_{k\in E}\mu_k\sum_{l\in E}\Gamma_{kl}\alpha_k)(\sum_{k\in E}\mu_k)^{-1} \qquad (3.1.18)$$

故

$$\sum_{k\in E}\Gamma_{jk}\alpha_k=\text{const} \qquad (j\in E) \qquad (3.1.19)$$

当$j=0$时，注意〔1〕中的引理2，便得

$$\sum_{k\in E}\Gamma_{0k}\alpha_k=\sum_{k\in E}(x_\infty-x_k)\mu_k\alpha_k \qquad (3.1.20)$$

当$j=1$时

$$\sum_{k\in E}\Gamma_{1k}\alpha_k=(x_\infty-x_1)\mu_0\alpha_0+\sum_{k\geqslant 1}(x_\infty-x_k)\mu_k\alpha_k$$

$$(3.1.21)$$

于是由（3.1.19），（3.1.20）和（3.1.21）得

$$(x_\infty-x_0)\mu_0\alpha_0=(x_\infty-x_1)\mu_0\alpha_0 \qquad (3.1.22)$$

所以

$$\alpha_0=0 \qquad (3.1.23)$$

若已证α_0，α_1，…，$\alpha_s=0$。往证$\alpha_{s+1}=0$。在（3.1.19）中令$j=s+1$与$s+2$得

$$\sum_{k\geqslant s+1}(x_\infty-x_k)\mu_k\alpha_k=(x_\infty-x_{s+2})\mu_{s+1}\alpha_{s+1}+$$

$$+\sum_{k\geq s+1}(x_\infty-x_k)\mu_k\alpha_k \tag{3.1.24}$$

于是

$$(x_\infty-x_{s+1})\mu_{s+1}\alpha_{s+1}=(x_\infty-x_{s+2})\mu_{s+1}\alpha_{s+1} \tag{3.1.25}$$

故

$$\alpha_{s+1}=0 \tag{3.1.26}$$

由数学归纳法知 $\alpha_k=0\ (k\in E)$。因而$(p_{ij}(\lambda))$是可逆Q过程。定理证毕。

§3.2. 可逆生灭过程（非保守情形）

本节总假定$a_0>0$，在引用〔1〕中结果时，将符号Π_λ与Π_λ^*对换。

定理3.2.1. 当且仅当x_∞为正则时存在可逆Q过程。而且当x_∞为正则时可逆Q过程唯一，它是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{(1-\lambda\xi_\lambda 1)(1-\lambda\xi_\lambda 1)'}{\lambda[1-\lambda\xi_\lambda 1,1]} \tag{3.2.1}$$

证明 因为可逆Q过程不中断，而在$a_0>0$时不存在不中断且满足柯氏向后微分方程组的Q过程。所以，任一可逆Q过程，必不满足柯氏向后微分方程组。由第二章定理2.6.1知，它也不满足向前微分方程组。由〔1〕知，在x_∞为自然或流入时，不存在既不满足向前也不满足向后微分方程组的Q过程，故此时不存在可逆Q过程。

当x_∞为流出时，$\sum_{i\in E}\mu_i=\infty$，由定理3.1.2知$Q$不可配称，从而也就不存在可逆$Q$过程。

当x_∞为正则时，〔1〕中把全部既不满足向前也不满足向后微分方程组的Q过程分为两组：

（1°）第一组Q过程在〔1，§6〕中的第一段中构造出来，总结于定理5.若Π_λ是其中任一可逆Q过程，由Π_λ不中断及〔1，定理5〕知，在Π_λ的表达式中的d_1和d_2应满足

$$d_1 = d_2 > 0 \tag{3.2.2}$$

由于任一Q过程满足柯氏向后微分方程组的第i（$i \neq 0$）个方程，于是由Π_λ的可逆性和第二章定理2.6.1知，Π_λ所代表的Q过程也满足柯氏向前微分方程组中的第i（$i \neq 0$）个方程。于是由〔1，§6，1°〕的最后一个式子知$\alpha(x_i) = 0$（$i \neq 0$）。故由$\alpha \neq 0$立得

$$\alpha(x_0) = \alpha > 0 \tag{3.2.3}$$

于是

$$\xi\alpha(x_i) = \Pi_\lambda^*(x_i,\ 0)\alpha \tag{3.2.4}$$

由〔1〕的（2.22）和（3.1）知

$$\Pi^*_\lambda(x_i,\ 0) = \frac{\xi_{1\lambda}}{\delta_0} \tag{3.2.5}$$

由（3.2.4）和（3.2.5）得

$$\xi\alpha(x_i) = \frac{\alpha}{\delta_0}\xi_{1\lambda} \tag{3.2.6}$$

于是

$$\Pi_\lambda = \Pi_\lambda^* + \frac{(\xi_{1\lambda} + \xi_{2\lambda})\ \left(\frac{\alpha}{\delta_0}\xi_{1\lambda} + p\xi_{2\lambda}\right)'}{\lambda\left(\frac{\alpha}{\delta_0}\xi_{1\lambda} + p\xi_{2\lambda},\ 1\right)} \tag{3.2.7}$$

由Π_λ^*和Π_λ的对称性以及$\xi_{1\lambda}$和$\xi_{2\lambda}$线性独立知

$$\frac{\alpha}{\delta_0} = p \tag{3.2.8}$$

于是

$$\Pi_\lambda = \Pi_\lambda^* + \frac{(1 - \lambda\xi_\lambda 1)(1 - \lambda\xi_\lambda 1)'}{\lambda[1 - \lambda\xi_\lambda 1, 1]}. \tag{3.2.9}$$

由于Π_λ是一个Q过程，(3.2.9)右端两项都是对称的，易证Π_λ是一个可逆Q过程。

(2°) 第二组Q过程是在〔1，§6〕的第二段中构造出来的，总结于定理6。若Π_λ是其中任一可逆Q过程，注意〔1〕中的(6.53)，由Π_λ满足柯氏向前微分方程组的第i $(i\neq0)$个方程和〔1，定理6〕，并参考〔1，定理5〕的证明过程，易证

$$\alpha_1(x_i)=\alpha_2(x_i)=0 \quad (i\neq0) \tag{3.2.10}$$

故用(3.2.10)和〔1〕的(6.36)得

$$h^{11}=(\alpha_1,\ v_1)=\alpha_1(x_0)v(x_0)\mu_0<+\infty \tag{3.2.11}$$

但由〔1〕的(6.36)知

$$h^{11}=+\infty \tag{3.2.12}$$

得出矛盾。故这组Q过程均不可逆。定理证毕。

§3.3. 可逆双边生灭过程

在第二章里，为了叙述的方便，我们把齐次可列马尔可夫过程的状态空间取为$E=(0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。其实，对于任意的可列集E，第二章的所有概念和结果均可保留。特别，在本节中，我们取$E=(0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)$

矩阵 $Q=(q_{ij})$：

$$\left.\begin{aligned}&q_{ij}=0,\ \text{如}\ |i-j|>1,\\&q_{i,i-1}=a_i>0,\ q_{i,i+1}=b_i>0\\&q_i\equiv-q_{ii}=a_i+b_i\end{aligned}\right\} \tag{3.3.1}$$

称为双边生灭Q矩阵，相应的过程称为双边生灭Q过程。

下面总假定矩阵Q是一个双边生灭Q矩阵。我们将直接引用〔6〕中的记号和结果。

定理3.3.1. 每一个双边生灭Q矩阵必有且仅有一个（不计常数因子）配称列，它就是标准测度（μ_i）：

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_i=\frac{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{i+1}}{b_0b_{-1}b_{-2}\cdots b_{i+1}b_i} \qquad \text{如 } i<-1,\\
&\mu_{-1}=\frac{1}{b_0b_{-1}},\quad \mu_0=\frac{1}{a_0b_0},\ \mu_1=\frac{1}{a_0a_1}\\
&\mu_0=\frac{b_1b_2\cdots b_{i-1}}{a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}a_i},\ \text{如 } i>1
\end{aligned}\right\}. \tag{3.3.2}$$

证明 （μ_i）显然是Q的一个配称列．今假定（u_i）也是Q的一个配称列，则应有

$$u_iq_{i,i+1}=u_{i+1}q_{i+1,i} \qquad (i\in E) \tag{3.3.3}$$

亦即

$$u_ib_i=u_{i+1}a_{i+1} \qquad (i\in E) \tag{3.3.4}$$

当$i>0$时，有

$$u_i=\frac{a_{i+1}}{b_i}u_{i+1}=\cdots=\frac{a_{i+1}\cdots a_0}{b_i\cdots b_{-1}}u_0 \tag{3.3.5}$$

当$i<0$时，有

$$u_i=\frac{b_{i-1}}{a_i}u_{i-1}=\cdots=\frac{b_{i-1}b_{i-2}\cdots b_0}{a_ia_{i-1}\cdots a_1}u_0 \tag{3.3.6}$$

令

$$u_0=\frac{k}{a_0b_0} \tag{3.3.7}$$

便得

$$u_i=k\mu_i \qquad (i\in E) \tag{3.3.8}$$

证毕．

定理3.3.2. Q可配称的充要条件是

$$\mu=\sum_{i\in E}\mu_i<\infty \tag{3.3.9}$$

唯一可能的配称分布是 $\left(\frac{\mu_i}{\mu}\right)_{i\in E}$.

证明是显然的。

在〔6〕中，以Π_λ表Q过程$P(t)=(p_{ij}(t))$的预解算子：

$$\Pi_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(p_{ij}(t)/\mu_j)dt \tag{3.3.10}$$

定理3.3.3. 若Q可配称，则Q过程$P(t)$可逆的充要条件是Π_λ对称：

$$\Pi_{ij}(\lambda)=\Pi_{ji}(\lambda) \qquad (i,j\in E,\ \lambda>0) \tag{3.3.11}$$

证明 因为Q可配称，故由定理3.3.2知$\mu<\infty$。于是

$$P(t)\ \text{可逆}\Longleftrightarrow\frac{\mu_i}{\mu}p_{ij}(t)=\frac{\mu_j}{\mu}p_{ji}(t)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow p_{ij}(t)/\mu_j=p_{ji}(t)/\mu_i\Longleftrightarrow\Pi_{ij}(\lambda)=\Pi_{ji}(\lambda).$$

证毕。

直接称可逆Q过程$P(t)$（或$P(\lambda)=(p_{ij}(\lambda))$）的预解算子$\Pi_\lambda$为可逆$Q$过程，我们的问题是要求出一切可逆的$Q$过程$\Pi_\lambda$。其结果是

定理3.3.4.

(i) 如果$R_a=+\infty$ $(a=1,2)$ 并且$\mu<+\infty$，则有且仅有一个可逆的Q过程，它就是那个最小Q过程；

(ii) 如果$R_a=+\infty$，$(\sum_{i<0}\mu_i)\delta_{a,1}+(\sum_{i>0}\mu_i)\delta_{a,2}<\infty$，（此处$\delta_{a,a}=1(a=1,2)$，$\delta_{a,b}=0$ $(a\neq b)$）并且$R_b<+\infty$，$S_b<+\infty$ $(a\neq b)$。则可逆Q过程唯一，它是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{\xi_{b\lambda}\xi'_{b\lambda}}{\lambda[\xi_{a\lambda},1]}. \tag{3.3.12}$$

(iii) 如果$R_a<+\infty$，$S_a<+\infty$ ($a=1, 2$)，则有无穷多个可逆Q过程，它们是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})'}{\lambda[\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda},1]} \tag{3.3.13}$$

及

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+[\xi_\lambda]'\mathfrak{M}_\lambda[\xi'_\lambda] \tag{3.3.14}$$

其中

$$\mathfrak{M}_\lambda=m\begin{pmatrix}1+mU_\lambda^{11} & -1+mU_\lambda^{12}\\ -1+mU_\lambda^{21} & 1+mU_\lambda^{22}\end{pmatrix} \tag{3.3.15}$$

m是满足$0<m<r_2-r_1$的任一实数；

$$[\xi_\lambda']=\begin{pmatrix}\xi_{1\lambda}'\\ \xi_{2\lambda}'\end{pmatrix}.$$

此处，ξ'是向量ξ的转置。

(iv) 除上述情况外，不存在可逆过程。(这里的记号与[1]稍有不同。)

证明 (i) 因为$\mu<+\infty$，故Q可配称；又$R_a=+\infty (a=1,2)$，知Q过程唯一。由第二章定理2.5.1知有唯一的可逆Q过程Π_λ^*。

(ii) 易证$\mu<+\infty$。事实上，不妨设$a=1$，此时

$$(\sum_{i<0}\mu_i)\delta_{a,1}+(\sum_{i>0}\mu_i)\delta_{a,2}=\sum_{i<0}\mu_i<\infty,$$ 又由$R_2<+\infty$，$S_2<+\infty$知$\sum_{i\geqslant 0}\mu_i<\infty$，于是$\mu<+\infty$。从而$Q$可配称。

由$R_a<+\infty$，$R_b=+\infty$以及Q为既约矩阵知，Q为单流出的既约可配称矩阵，于是由第二章定理2.6.3和定理2.6.4立得所欲证。

(iii) 易知$\mu<+\infty$。从而Q可配称。在这种情况下，[6]把全部Q过程分成三大类：

(1) 第一类是在[1, §7]中构造出来的。若Π_λ是其中的可逆Q

过程，则由第二章定理2.6.1和Π_λ不中断知，在Π_λ的表达式中必须$a=0$，$d_1=d_2$，即必须：

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})(p_1\xi_{1\lambda}+p_2\xi_{2\lambda})'}{\lambda[p_1\xi_{1\lambda}+p_2\xi_{2\lambda},1]} \qquad (3.3.16)$$

再由$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda'$及$\Pi_\lambda^*=\Pi_\lambda^{*\prime}$得

$$(p_2-p_1)\xi_{1\lambda}(i)\xi_{2\lambda}(j)+(p_1-p_2)\xi_{2\lambda}(i)\xi_{1\lambda}(j)=0$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0)$$

于是由$\xi_{2\lambda}\neq0$及$\xi_{1\lambda}$与$\xi_{2\lambda}$线性独立，得

$$p_1=p_2 \qquad (3.3.17)$$

从而

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})'}{\lambda[\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda},1]} \qquad (3.3.18)$$

显然由（3.3.18）决定的Π_λ是对称的，从而是可逆的。

（2）第二类是在[6，定理8.1]中构造出来的，由于这类过程不满足柯氏向前微分方程组，故不可逆。

（3）第三类是在[1，定理8.2]中构造出来的。若Π_λ是其中的可逆Q过程，则由第二章定理2.6.1及Π_λ不中断知，在Π_λ的表达式中，必须$\overline{S}^{12}=\overline{S}^{21}=1$及$\overline{R}[\alpha]=[0]$，即必须

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+[\xi_\lambda]'\,\mathfrak{M}_\lambda[\xi_\lambda'] \qquad (3.3.19)$$

其中

$$\mathfrak{M}_\lambda=\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{U}_\lambda\right]^{-1}\overline{\mathfrak{M}} \qquad (3.3.20)$$

而

$$\overline{\mathfrak{M}}=\begin{pmatrix}\overline{M}_{11} & 0\\ 0 & \overline{M}_{22}\end{pmatrix},0<\overline{M}_{aa}<r_2-r_1\ \ (a=1,2)$$

$$(3.3.21)$$

注意Π_λ的对称性并参考（1）中证明$p_1=p_2$的过程，可知$\mathfrak{M}_\lambda$必须是对称矩阵。

往证：$\mathfrak{M}_\lambda$对称当且仅当$\overline{M}_{11}=\overline{M}_{22}=m$。

如果 $\overline{M}_{11}=\overline{M}_{22}=m$，则

$$\mathfrak{M}_\lambda=m\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+mU_\lambda\right]^{-1} \tag{3.3.22}$$

由U_λ为对称矩阵及满秩对称矩阵的逆矩阵亦为对称矩阵，立得$\mathfrak{M}_\lambda$为对称矩阵。

反之，如果$\mathfrak{M}_\lambda$为对称矩阵，即$\mathfrak{M}_\lambda=\mathfrak{M}_\lambda'$，注意$\overline{\mathfrak{M}}=\overline{\mathfrak{M}}'$，及

$U_\lambda=U_\lambda'$得

$$\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\overline{\mathfrak{M}}U_\lambda\right]^{-1}\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}_\lambda=\mathfrak{M}_\lambda'=$$

$$=\overline{\mathfrak{M}}\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+U\overline{\mathfrak{M}}\right]^{-1} \tag{3.3.23}$$

即

$$\overline{\mathfrak{M}}\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+U_\lambda\overline{\mathfrak{M}}\right]$$

$$=\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\overline{\mathfrak{M}}U_\lambda\right]\overline{\mathfrak{M}} \tag{3.3.24}$$

于是

$$\overline{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\overline{\mathfrak{M}} \tag{3.3.25}$$

即

$$\begin{pmatrix}\overline{M}_{11} & -\overline{M}_{11}\\ -\overline{M}_{22} & \overline{M}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{M}_{11} & -\overline{M}_{22}\\ -\overline{M}_{11} & \overline{M}_{22}\end{pmatrix} \tag{3.3.36}$$

从而

$$\bar{M}_{11} = \bar{M}_{22} = m \tag{3.3.27}$$

故在〔1, §8〕中构造出来的Q过程中，可逆的Q过程为

$$\Pi_\lambda = \Pi_\lambda^* + [\xi_\lambda]' \mathfrak{M}_\lambda [\xi_\lambda'] \tag{3.3.28}$$

其中

$$\mathfrak{M}_\lambda = m\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + mU_\lambda \right]^{-1} \tag{3.3.29}$$

而m为满足条件$0 < m < r_2 - r_1$的任一实数.参考（1）中证明$p_1 = p_2$的过程，易证对于不同的m,(3.3.28)表示不同的Q过程. 从而有无穷多个可逆的Q过程.

(iv) 除上述情况外，总有$\mu = +\infty$. 由定理3.3.2知此时Q不可配称，故不存在可逆的Q过程.

定理的证明遂告完成.

由定理3.3.4立得

定理3.3.5. 可逆Q过程存在的充要条件是：$\mu < +\infty$. 存在不止一个可逆Q过程的充要条件是：$R_a < +\infty$, $S_a < +\infty$ $(a = 1,2)$；此时有无穷多个可逆的Q过程存在.

参 考 文 献

〔1〕 杨超群，一类生灭过程，数学学报，15:1 (1965),9—31.

〔2〕 杨超群,关于生灭过程构造论的注记,数学学报，15:2(1965),173—187.

〔3〕 吴立德,可数马尔可夫过程状态的分类,数学学报,15:1(1965), 32—41.

〔4〕 S.Karling, J.L.McGregor. The classification of birth and death processes, Trans, Amer, Math.Soc, 86 (1957), 366—401.

〔5〕 杨超群，生灭过程的性质，数学进展，9:4 (1966),365—380.

〔6〕 杨超群，双边生灭过程，南开大学学报(自然科学),5:5 (1964),9—40.

第四章　二阶微分算符导出的马氏过程及其可逆性

龚光鲁　钱　敏

（北京大学）

对于微分算符

$$\Omega=\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d}{dx}\right)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x) \tag{4.1.1}$$

其中

$a(x)>0$，$c(x)\leqslant 0$，$a(x)$，$b(x)$连续可微，$c(x)$连续。我们要研究Ω导出的马氏过程的可逆性。

§4.1.　边界点的分类

算符(4.1.1)有形式共轭算符Ω^*

$$\Omega^* v=\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dv}{dx}\right)-\frac{d}{dx}(b(x)v)+c(x)v \tag{4.1.2}$$

本节把 *Feller*[3] 关于边界点的分类直接推广到显含$c(x)$ 的形式文中涉及了有 $c(x)$ 的情况，但必须附加条件：$\Omega u=0$ 有严格正解。*Mandl*[5]中也讨论了有$c(x)$情况，但要求$\lim\limits_{x\to-\infty} c(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} c(x)$分别存在，且$a(x)\mathrm{w}(x)c(x)\in L(-\infty,\ \infty)$，其中

$$\mathrm{w}(x)=\exp\int_0^x\frac{b(s)}{a(s)}ds \tag{4.1.3}$$

〔注〕　本文由〔1〕〔2〕改写而成。

本节不作这些限制），简化并推广了[3]的结果。

本章出现的$w(x)$恒指(4.1.3)中的含义。

易证下述（注意到$a(x)w'(x)=b(x)w(x)$）

引理4.1.1.

1° 对任意$u(x)$有(以下略写变量x)

$$w\Omega u=\Omega^*(wu)=(awu')'+cwu.$$

2° 对方程

$$(\lambda-\Omega)u=0$$

的解u有强极大原则：$u(x)$无正极大及负极小。

3° 对上述解u有

$$(awu')'=(\lambda-c)wu$$

(a, c, w, u分别指$a(x)$, $c(x)$, $w(x)$, $u(x)$)。由1° w是Ω的对称化乘子。又若u是非负解则awu'递增。

引理4.1.2. 对$\lambda>0$，方程

$$(\lambda-\Omega)u=0 \tag{4.1.4}$$

有一个非增正解$u_1(x)$（依赖λ），它是边值问题

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=0,\\ u(0)=1,\ u(\xi)=0\ (\xi>0)\end{cases} \tag{4.1.5}$$

的解$u_{1\xi}(x)$的极限：$u_{1\xi}(x)\to u_1(x)$, $(\xi\to\infty)$。而且$u_1(x)$一定满足：

1° $(1-c(x))u_1(x)w(x)\in L(0,\infty)$。(因而$u_1w\in L(0,\infty)$)。(1°等价于：对任意$\lambda>0$有$(\lambda-c(x))u_1(x)w(x)\in L(0,\infty)$)。

2° $(awu_1')(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}a(xw(x)u_1'(x)$存在。

完全类似地，方程(4.1.4)还有一个非降正解$u_2(x)$，它是边值问题

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=0,\\ u(0)=1,\ u(\zeta)=0\ (\zeta<0)\end{cases}\tag{4.1.6}$$

的解 $u_{2\zeta}(x)$ 的极限：$u_{\zeta 2}(x)\to u_2(x)$ $(\zeta\to-\infty)$。而且 $u_2(x)$ 一定满足：

$1^{\circ\circ}$ $(1-c(x))u_2(x)\mathrm{w}(x)\in L(-\infty,0)$（因而$u_2\mathrm{w}\in L(-\infty,0)$ $1^{\circ\circ}$等价于：对任$\lambda>0$，$(\lambda-c(x))u_2(x)\mathrm{w}(x)\in L(-\infty,\ 0)$）。

$2^{\circ\circ}$ $(a\mathrm{w}u_2')(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_2'(x)$存在。

同时存在常数 $c_1>0$与$c_2<0$，使

$$\begin{cases}u_2(x)=u_1(x)\left(\displaystyle\int_0^x\frac{c_1ds}{a(s)\mathrm{w}(s)u_1(s)^2}+1\right)\\ u_1(x)=u_2(x)\left(\displaystyle\int_0^x\frac{c_2ds}{a(s)\mathrm{w}(s)u_2(s)^2}+1\right)\end{cases}\tag{4.1.7}$$

证明

(A)先证 $u_1(x)$ 的存在性：令 $u_\xi(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 为 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=0,\\ u(\xi)=0,\ u'(\xi)=-1\qquad(\xi>0)\end{cases}$$

的解．由引理4.1.1的强极大原则可知：当 $x<\xi$ 时，$u_\xi(x)>0$，$u_\xi'(x)<0$。令 $u_{1\xi}(x)=u_\xi(x)/u_\xi(0)$，则它是 (4.1.5) 的解，而且当$x<\xi$时，$u_{1\xi}(x)$严格单调递减恒正。

对$\xi_1<\xi_2$，有$u_{1\xi_1}(0)=u_{1\xi_2}(0)$，$u_{1\xi_1}(\xi_1)=0<u_{1\xi_2}(\xi_1)$，再由引理4.1.1的极大原则可得

$$u_{1\xi_1}(x)\leqslant u_{1\xi_2}(x)\leqslant u_{1\xi_2}(0)=1\quad(0\leqslant x\leqslant\xi_1)$$

即$u_{1\xi}(x)$对ξ单调递增且在任意区间〔0，l〕$(l>0)$ 上一致有界，因而极限

$$u_1(x)=\lim_{\xi\to+\infty}u_{1\xi}(x)\qquad(0\leqslant x<+\infty)$$

存在，而且因 $u_{1\xi}(x)$是非减正函数可知 $u_1(x)$是非减正函数，同时 $u_1(0)=1$。

另一方面，当 $x<0$ 时，$u_{1\xi}(x)$ 对ξ是单调递减的，这是因为：

若 $\hat{u}_\xi(x)$为边值问题

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=0,\\ u(-l)=1,\ u(\xi)=0 \quad (\xi,\ l>0)\end{cases}$$

的解，则与 $u_{1\xi}(x)$完全类似地可证$\hat{u}_\xi(x)$ 对ξ递增。但$\hat{u}_\xi(x)/\hat{u}_\xi(0)$与$u_{1\xi}(x)$满足同样边值，因此

$$\hat{u}_\xi(x)/\hat{u}_\xi(0)=u_{1\xi}(x),$$

对于$\xi_1<\xi_2$有：

$$u_{1\xi_2}(-l)=\frac{\hat{u}_{\xi_2}(-l)}{\hat{u}_{\xi_2}(0)}=\frac{1}{\hat{u}_{\xi_2}(0)}\leqslant\frac{1}{\hat{u}_{\xi_1}(0)}=\frac{\hat{u}_{\xi_1}(-l)}{\hat{u}_{\xi_1}(0)}$$

$$=u_{1\xi_1}(-l)$$

由 $l>0$ 之任意性可知：$u_{1\xi}(x)$在$x<0$时，对ξ递减。所以当$x<0$时，

$$u_1(x)=\lim_{\xi\to+\infty}u_{1\xi}(x)$$

仍存在非负。由$u_{1\xi}(x)$对$x(<\xi)$非增性即得$u_1(x)$在$-\infty<x<\infty$对x的非增性。

(B) 证明$u_1(x)$是$(\lambda-\Omega)u=0$的解。

设该方程的基本解为$w_1(x)$，$w_2(x)$，它们在任意有限区间〔α, β〕上线性无关，故矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\int_a^b w_1(x)^2dx & \int_a^b w_1(x)w_2(x)dx\\ \int_a^b w_1(x)w_2(x)dx & \int_a^b w_2(x)^2dx\end{pmatrix}$$

可逆。取$\xi_n \uparrow \infty$，于是存在α_n，β_n，使

$$u_{1\xi_n}(x) = d_n w_1(x) + \beta_n w_2(x)$$

由 $u_{1\xi_n}(x)$在$[\alpha, \beta]$一致有界，故

$$\int_a^b u_{1\xi_n}(x) w_i(x) dx \to \int_a^b u_1(x) w_i(x) dx \quad (i = 1, 2)$$

所以

$$(\alpha_n, \beta_n) = A^{-1} \begin{pmatrix} \int_a^b u_{1\xi_n}(x) w_1(x) dx \\ \int_a^b u_{2\xi_n}(x) w_2(x) dx \end{pmatrix}$$

存在极限 (α_0, β_0)，于是

$$u_1(x) = \alpha_0 w_1(x) + \beta_0 w_2(x) \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$$

即在$[\alpha, \beta]$上$u_1(x)$是解，但$[\alpha, \beta]$是任意的，因而$u_1(x)$是解。

(C) 由引理4.1.1，取u_1为u，两边积分，并注意到$w(0) = 1$，$u_1' \leqslant 0$，得：

$$\int_0^y (\lambda - c(x)) u_1(x) w(x) dx = a(y) w(y) u_1'(y) - a(0) u_1'(0)$$
$$\leqslant -a(0) u_1'(0)$$

令$y \to \infty$，即得 $(\lambda - c(x)) u_1(x) w(x) \in L(0, \infty)$，此等价于1°。同时可知2°成立。

(D) 引理最后的公式即*Liouville*公式。对此公式取微商后再取$x = 0$，得

$$c_1 = a(0)(u_2'(0) - u_1'(0)) \geqslant 0$$

但必须$c_1 > 0$，因否则$u_1 \equiv u_2$，因而必须$u_1(x) \equiv$常数，此与u_1是$(\lambda - \Omega) u = 0$之解矛盾。又易证$c_2 = -c_1$。

引理4.1.3. 令$\Delta(x) = u_1 u_2' - u_2 u_1'$，则有

$$a(x) w(x) \Delta(x) \equiv a(0) \Delta(0) \tag{4.1.8}$$

类似地，令$\Delta_{\zeta\xi}(x) = u_{1\xi} u_{2\zeta}' - u_{2\zeta} u_{1\xi}'$，则

$$a(x)\mathrm{w}(x)\Delta_{\zeta\xi}(x)\equiv a(0)\Delta_{\zeta\xi}(0) \tag{4.1.8$'$}$$

于是在$\zeta<x<\xi$上，非齐次方程零边值问题

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=g & (g\text{连续})\\ u(\zeta)=u(\xi)=0\end{cases}$$

的唯一解可以写为

$$u(x)=\frac{1}{a(0)\Delta_{\zeta\xi}(0)}\Big[u_{1\xi}(x)\int_{\zeta}^{x}u_{2\zeta}(s)\mathrm{w}(s)g(s)ds+$$
$$+u_{2\zeta}(x)\int_{x}^{\xi}u_{1\xi}(s)\mathrm{w}(s)g(s)ds\Big] \tag{4.1.9}$$

证明 易查

$$v(x)\equiv a(x)\Delta(x)$$

满足

$$v'+\frac{b(s)}{a(s)}v=0$$

所以

$$a(x)\Delta(x)\mathrm{w}(x)=\text{常数}.$$

应用常数变易法可得(4.1.9)。

引理4.1.4.

$$\frac{1}{a\mathrm{w}u_2^2}\in L(0.\ \infty),\ \frac{1}{a\mathrm{w}u_1^2}\in L(-\infty,\ 0) \tag{4.1.10}$$

而且

$$u_1(x)=\frac{\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{1}{a(s)\mathrm{w}(s)u_2(s)^2}ds}{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{a(s)\mathrm{w}(s)u_2(s)^2}ds}u_2(x) \tag{4.1.11}$$

证明 令

$$v_\xi(x)=\left(1-\frac{\int_0^x \frac{ds}{a(s)w(s)u_2^2(s)}}{\int_0^\xi \frac{ds}{a(s)w(s)u_2^2(s)}}\right)u_2(x)$$

那末$v_\xi(x)$也是$(\lambda-\Omega)u=0$的解，而且和 $u_{1\xi}(x)$ 有相同的边值，因此$u_{1\xi}(x)=v_\xi(x)$。但是显然$u_1(x)\neq u_2(x)$，所以当$\xi\to+\infty$时，必须有$\int_0^\infty \frac{dx}{a(x)w(x)u_2(x)^2}<\infty$，而且(4.1.11)成立。

引理4.1.5. 令

$$\omega_1=\lim_{x\to+\infty}u_1(x),\quad \omega_2=\lim_{x\to-\infty}u_2(x)$$

则$\omega_1>0$的充要条件为

$$1^\circ \quad \frac{1}{aw}\in L(0,\ \infty); \tag{4.1.12}$$

$$2^\circ \quad (1-c(x))w(x)\in L(0,\infty),\text{且}$$

$$\frac{1}{a(x)w(x)}\int_x^\infty(1-c(s))w(s)ds\in L(0,\infty). \tag{4.1.13}$$

类似地对ω_2也有相应的结论，只须把$+\infty$换为$-\infty$。

证明

必要性：由引理4.1.4及$u_2(x)$之递增性

$$u_1(x)=\frac{\int_x^\infty \frac{ds}{a(s)w(s)u_2(s)^2}}{\int_0^\infty \frac{ds}{a(s)w(s)u_2(s)^2}}u_2(x)$$

$$\leqslant\frac{\int_x^\infty \frac{ds}{a(s)w(s)u_2(s)}}{\int_0^\infty \frac{ds}{a(s)w(s)u_2(s)^2}}$$

如果1°不成立，那末（当$x>0$时）

$$\int_x^\infty \frac{ds}{a(s)w(s)u_2(s)} \leqslant \frac{1}{u_2(0)} \int_x^\infty \frac{ds}{a(s)w(s)} \to 0 \quad (x\to\infty)$$

因而$u_1(x)\to 0$（$x\to+\infty$），这与$\omega_1>0$矛盾，故1°成立。

对引理4.1.1.3°两边积分（取$u=u_1$）

$$\int_t^x (\lambda - c(s))u_1(s)w(s)ds = a(s)w(s)u_1'(s)\Big|_t^x$$

$$\leqslant -a(t)w(t)u_1'(t) \quad (4.1.14)$$

从而（令$x\to+\infty$后）有

$$\frac{1}{a(t)w(t)}\int_t^\infty (\lambda - c(s))u_1(s)w(s)ds \leqslant -u_1'(t)$$

但$-u_1'(t)\in L(0,\infty)$，因此左边也属于$L(0,\infty)$。再利用$u_1(x)\geqslant \omega_1>0$，可知2°成立（不妨把$\lambda$改为1）。

充分性：首先由1°知必须有

$$-a(0)u_1'(0) = \int_0^\infty (\lambda - c(s))u_1(s)w(s)ds \qquad (4.1.15)$$

因若不然，那末

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-a(0)u_1'(0) - \int_0^x (\lambda - c(s))u_1(s)w(s)ds\right] > 0$$

$$(4.1.16)$$

（方括号内函数对x递减，且由（4.1.14）知应等于$-a(x)w(x)u_1'(x)$，即是正的，故极限存在），再由(4.1.14)有

$$-u_1'(x) = \frac{1}{a(x)w(x)}\left[-a(0)u_1'(0) - \int_0^x (\lambda - c(s))u_1(s)w(s)ds\right]$$

因此由(4.1.16)及1°得到上式右边的函数不属于$L(0,\infty)$，这是与

$-u_1'(x)\in L(0,\infty)$矛盾的，因此(4.1.15)成立。

在(4.1.14)中取 $t=0$，结合(4.1.15)得：

$$-u_1(x)=\frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\int_x^{\infty}(\lambda-c(s))u_1(s)\mathrm{w}(s)ds$$

$$\leqslant\frac{u_1(x)}{a(x)\mathrm{w}(x)}\int_x^{\infty}(\lambda-c(s))\mathrm{w}(s)ds$$

所以由2°得

$$-\frac{u_1'}{u_1}\in L(0,\ \infty)$$

记它在$[0,\ \infty)$的积分值为k，那末，由$u_1(0)=1$可得

$$k=\int_0^{\infty}-\frac{u_1'(x)}{u_1(x)}dx\geqslant\int_0^x-\frac{u_1'(s)}{u_1(s)}ds=-\ln u_1(x)$$

因此

$$u_1(x)\geqslant e^{-k}$$

于是

$$\omega_1\geqslant e^{-k}>0.$$

推论 若$\frac{1}{a\mathrm{w}}\in L(0,\infty)$，则$(a\mathrm{w}u_1')(+\infty)=0$.(结合(4.1.14)，(4.1.15)得)

引理4.1.6. $u_2(x)$有界（即$u_2(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}u_2(x)<\infty$）的充要条件为

$$\frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\int_0^x(1-c(s))\mathrm{w}(s)ds\in L(0,\infty)\quad(4.1.17)$$

因而对某个$\lambda_0(>0)$的$u_2(x)$（依赖λ_0）有界就可推出对任一个$\lambda(>0)$的$u_2(x)$（依赖λ，但λ固定）都分别有界。

类似地，$u_1(x)$有界（即$u_1(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}u_1(x)<\infty$)的充要条件为

$$\frac{1}{a(x)w(x)}\int_x^0(1-c(s))w(s)ds\in L(-\infty,0) \qquad (4.1.17)'$$

因而对某个$\lambda_0>0$的$u_1(x)$有界就可推出对任一个$\lambda>0$的$u_2(x)$都分别有界.

证明 必要性：

若$u_2(+\infty)<\infty$，则

$$\frac{1}{aw}\leqslant\frac{u_2(+\infty)^2}{awu_2^2}$$

由引理4.1.4可知$\frac{1}{aw}\in L(0,\infty)$。由(4.1.14)（但$u_1$改为$u_2$）

$$u_2'(x)=\frac{1}{a(x)w(x)}\left[\int_0^x(\lambda-c(s))u_2(s)w(s)ds\right.$$
$$\left.+a(0)u_2'(0)\right]$$

及$u_2'(x)\in L(0,\infty)$（因为$u_2(+\infty)<\infty$，且$u_2(x)>0$)，推得

$$\frac{1}{a(x)w(x)}\int_0^x(\lambda-c(s))u_2(s)w(s)ds\in L(0,\infty)$$

注意到$u(x)\geqslant u(0)=1$（$x>0$)，所以得到

$$\frac{1}{a(x)w(x)}\int_0^x(\lambda-c(s))w(s)ds\in L(0,\infty)$$

显然λ可改为1，因为这是等价的.

充分性：若（4.1.17）成立，注意到$\int_0^x(1-c(s))w(s)ds$在$x\geqslant x_0(x_0>0)$有正下界，故由(4.1.17)可得

$$\frac{1}{a(x)w(x)}\in L(x_0,\infty)$$

因而$\frac{1}{aw}\in L(0,\infty)$、再由（4.1.14）（但$u_1$改为$u_2$）

$$u_2'(x)=\frac{1}{a(x)w(x)}\left[\int_0^x(\lambda-c(s))w(s)u_2(s)ds+a(0)u_2'(0)\right]$$

$$\leqslant\frac{u_2(x)}{a(x)w(x)}\left[\int_0^x(\lambda-c(s))w(s)ds+a(0)u_2'(0)\right]$$

于是

$$\frac{u_2'(x)}{u_2(x)}\leqslant\frac{1}{a(x)w(x)}\int_0^x(\lambda-c(s)w(s)ds$$

$$+a(0)u_2'(0)\frac{1}{a(x)w(x)}$$

右边的函数属于$L(0,\infty)$，令其在〔$0,\infty$）的积分值为k，对上式两边从0到∞积分，并注意$u_2(0)=1$故得

$u_2(x)\leqslant e^k$.

由$u_1(x)$，$u_2(x)$的性质易得下述引理：

引理4.1.7. $(\lambda-\Omega)u=0$有有界解的充要条件为$u_1(x)$，$u_2(x)$之一有界。

并且上述方程对一个$\lambda_0>0$有有界解就可得对任意λ有有界解。

定义4.1.1. 令

$$s(x)=\int_0^x\frac{ds}{a(s)w(s)}.$$

$$m(x)=\int_0^x(1-c(s))w(s)ds.$$

$+\infty$分别称为算符Ω的

① 正则边界点。

② 流出边界点。

③ 流入边界点。

④ 自然边界点。

如果它分别满足下面各个与上面 ①——④ 对应的条件（下面的 $u_1(+\infty)$即是引理4.1.5中的ω_1）：

① $u_1(+\infty)$，$u_2(+\infty)<\infty$，$v_1(x)$，$v_2(x)\in L(0, +\infty; (1-c(x))dx)$

② $u_1(+\infty)$，$u_2(+\infty)<\infty$，$v_1(x)$，$v_2(x)$中只有一个$\in L(0, +\infty; (1-c(x))dx)$

③ $u_1(+\infty)$，$u_2(+\infty)$中只有一个$<\infty$，$v_1(x)$，$v_2(x)\in L(0, +\infty; (1-c(x))dx)$

④ $u_1(+\infty)$，$u_2(+\infty)$中只有一个$<\infty$，$v_1(x)$，$v_2(x)$中只有一个$\in L(0, +\infty; (1-c(x))dx)$

其中

$$v_i(x)=u_i(x)\mathrm{w}(x),$$

$$L(0,+\infty; (1-c(x))dx)=$$

$$=\left\{f(x): \int_0^\infty |f(x)|(1-c(x))dx<+\infty\right\}.$$

同理$-\infty$也是一个边界点，与上面有类似的分类（只是$+\infty$改为$-\infty$）。

定理4.1.1. $+\infty$是正则边界与下述诸说法之一等价：

(R_1) $u_2(+\infty)<\infty$，$v_2(x)\in L(0,+\infty; (1-c(x))dx)$.

(R_2) $\dfrac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\displaystyle\int_0^x(1-c(s))\mathrm{w}(s)ds\in L(0,+\infty)$,

$$\frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\int_x^\infty(1-c(s))\mathrm{w}(s)ds\in L(0,+\infty).$$

$(R_3)\quad \sigma_2=\iint\limits_{0\leqslant y<x<\infty} ds(x)dm(y)<\infty,$

$$\mu_2=\iint\limits_{0<x\leqslant y<\infty} ds(x)dm(y)<\infty.$$

$(R_4)\quad m(+\infty)<\infty,\ s(+\infty)<\infty.$

证明

由于$u_1(+\infty)=\omega_1<\infty$及$v_1(x)\in L(0,\ \infty;\ (1-c(x))dx)$（引理4.1.2），所以$(R_1)$与定义（正则边界点）是等价的。

由引理4.1.6可知(R_2)与(R_1)是等价的。

(R_3)只是(R_2)的另一种叙述方式。

(R_4)与(R_2)的等价也是易见的。

定理4.1.2.　$+\infty$是流出边界与下述诸说法之一等价：

(E_1) $u_2(+\infty)<\infty$, $v_2(x)\overline{\in}L(0,+\infty;\ (1-c(x))dx)$.

(E_2) $\dfrac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\displaystyle\int_0^x(1-c(s))\mathrm{w}(s)ds\in L(0,+\infty)$.

$$(1-c(x))\mathrm{w}(x)\int_0^x\frac{1}{a(s)\mathrm{w}(s)}ds\overline{\in}L(0,\ +\infty),$$

(E_3) $\sigma_2<\infty$, $\mu_2=\infty$.

(E_4) $m(+\infty)=\infty$, $s(+\infty)<\infty$, $\sigma_2<\infty$.

证明

由引理4.1.2，推知(E_1)与流出边界的定义等价。

由引理4.1.6，及反证法可知(E_2)与(E_1)是等价的。

(E_3)是(E_2)的另一种叙述方式。

(E_4)与(E_2)也易证是等价的。

定理4.1.3. $+\infty$是流入边界与下述诸说法之一等价：

(I_1) $u_2(+\infty)=+\infty, v_2(x)\in L(0, +\infty; (1-c(x))dx)$.

(I_2) ω_1(即$u_1(+\infty)$)>0。

(I_3) $\dfrac{1}{a\mathrm{w}}\overline{\in} L(0, \infty)$.

$m(+\infty)<\infty$, 且

$$\frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\int_x^\infty (1-c(s))\mathrm{w}(s)ds\in L(0, \infty).$$

(I_4) $\sigma_2=+\infty$, $\mu_2<\infty$.

(I_5) $s(+\infty)=\infty$, $\mu_2<\infty$.

证明

由引理 4.1.2 可知(I_1)与流入边界的定义等价。下面证明的路线是：$(I_1)\Longleftrightarrow(I_2)\Longleftrightarrow I_3\Longleftrightarrow(I_4)$ $(I_5)\Longleftrightarrow(I_3)$。

$(I_1)\Longrightarrow(I_2)$：与(4.1.14)类似地有

$$a(x)\mathrm{w}(x)u_2'(x)=\int_0^x(\lambda-c(s))u_2(s)\mathrm{w}(s)ds$$

$$+a(0)\mathrm{w}(0)u_2'(0)<\text{常数}c.$$

由引理4.1.4知

$$u_1(x)=u_2(x)\frac{\int_x^\infty \frac{1}{a\mathrm{w}u_2^2}ds}{\int_0^\infty\frac{1}{a\mathrm{w}u_2^2}ds}=u_2(x)\frac{\int_x^\infty\frac{u_2'}{a\mathrm{w}u_2'u_2^2}ds}{\int_0^\infty\frac{1}{a\mathrm{w}u_2^2}ds}$$

$$\geqslant\frac{1}{c}u_2(x)\frac{\int_x^\infty\frac{u_2'}{u_2^2}ds}{\int_0^\infty\frac{1}{a\mathrm{w}u_2^2}ds}=\frac{1}{c\int_0^\infty\frac{1}{a\mathrm{w}u_2^2}ds}>0$$

由此 $\omega_1 \geqslant \dfrac{1}{c\int_0^\infty \dfrac{1}{awu_2^2}ds}$。

$(I_2)\Rightarrow(I_1)$：由引理4.1.5可知，在(I_2)成立时有：

$$(1-c(x))w(x)\in L(0,\infty),$$

且

$$\frac{1}{a(x)w(x)}\int_0^x(1-c(s))w(s)ds\overline{\in}L(0,\ \infty)$$

再由引理 4.1.6 可得 $u_2(+\infty)=+\infty$。

另一方面此时还有（引理4.1.5）

$$\frac{1}{a(x)w(x)}\int_x^\infty(1-c(x))w(s)ds\in L(0,\infty) \quad (4.1.18)$$

把它从 0 到 $+\infty$积分后用Fubini 定理，可得

$$(1-c(x))w(x)\int_0^x\frac{1}{a(s)w(s)}ds\in L(0,\ \infty)$$

由$u_1(x)$在〔0，∞）有界性及$u_1(x)\geqslant\omega_1$，所以

$$u_1(x)(1-c(x))w(x)\int_0^x\frac{1}{a(s)w(s)u_1(s)^2}ds\in L(0,\infty)$$

故由引理 4.1.2 及（4.1.7）可知

$$v_2(x)=u_2(x)w(x)\in L(0,\infty;\ (1-c(x))dx).$$

$(I_2)\Longleftrightarrow(I_3)$：此即引理4.1.5。

$(I_3)\Longleftrightarrow(I_4)$：$(I_3)$等价于$(I_3')$：$(I_3)$再加上（4.1.18)，而后者$((I_3'))$是与$(I_4)$等价的。

$(I_3)\Longleftrightarrow(I_5)$：易证。

定理4.1.4. $+\infty$是自然边界与下述诸说法之一等价：

(N_1) $u_2(+\infty)=+\infty$，$v_2(x)\overline{\in}L(0,\infty;\ (1-c(x))dx)$。

(N_2) $\sigma_2=\infty$，$\mu_2=\infty$。

(N_3) $s(+\infty)<\infty$, $m(+\infty)=+\infty$, $\sigma_2<\infty$,

或者 $s(+\infty)=+\infty$, $\mu_2=\infty$。

(但后一种情形中，$m(+\infty)$ 可以有限也可能为 $+\infty$)。

证明 综合前三定理而得。

§4.2. 非齐次方程的最小解

引理4.2.1. 设C为 $(-\infty,\infty)$ 上全体有界连续函数组成的 Banach空间，$g\in C, g(x)\geqslant 0$。令$f_N(x)$为边值问题

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=g & (\zeta_N<x<\xi_N)\\ u(\zeta_N)=u(\xi_N)=0\end{cases}$$

的解，则有

1° $f_N(x)\geqslant 0$ $(\zeta_N<x<\xi_N)$。

2° $\lambda\max\limits_{\zeta_N\leqslant x\leqslant\xi_N} f_N(x)\leqslant\|g\|$ (在C空间的范数)。

3° 当$\zeta_N\to-\infty$, $\xi_N\to+\infty$时，$f_N(x)$对N不减。

4° $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x)$ 存在，我们记它为 $f(x)$，则 $f\in C$，$f\geqslant 0$，且 $\|f\|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|g\|$。

5° $f(x)$与ζ_N，ξ_N选法无关，所以可以记成$S_\lambda^0 g$，而且有

$$(S_\lambda^0 g)(x)=\frac{1}{a(0)\Delta(0)}\left[\int_{-\infty}^{x}u_1(x)u_2(s)w(s)g(s)ds+u_2(x)\int_{x}^{\infty}u_1(s)w(s)g(s)ds\right] \quad (4.2.1)$$

显然$S_\lambda^0 g\geqslant 0$，而且它是 $(\lambda-\Omega)u=g$的解，因而二次连续可微。

证明 1°由强极大原则是显然的。2°设$f_N(x)$在x_0 $(\zeta_N<x_0<\xi_N)$

处达极大，那末$f_N'(x_0)=0$，$f_N(x_0)>0$，$f_N''(x_0)\leqslant 0$，故

$$g(x_0)=(\lambda-c)f_N(x_0)-af''(x_0)-(b+a')f'(x_0)$$
$$\geqslant(\lambda-c(x_0))f_N(x_0)\geqslant\lambda f_N(x_0).$$

3° 设$N_1<N_2$，令边值问题

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=g & (\zeta_{N_1}<x<\xi_{N_2})\\ u(\zeta_{N_1})=u(\xi_{N_2})=0\end{cases}$$

的解为$\widetilde{f}(x)$，那么$\widetilde{f}-f_{N_1}$是 $(\lambda-\Omega)u=0$的在ζ_{N_1}处为0，ξ_N处为正边值的解，由引理4.1.1得

$\widetilde{f}(x)-f_{N_1}(x)$在$[\zeta_{N_1},\ \xi_{N_2}]$单调不减且非负。类似地还有

$f_{N_2}(x)-\widetilde{f}(x)$在$[\zeta_{N_1},\ \xi_{N_2}]$单调不减且非负。因而在$[\zeta_{N_1},\ \xi_{N_1}]$上

$f_{N_1}(x)\leqslant f_{N_2}(x)$，$f_{N_2}(x)-f_{N_1}(x)$单调不减。

4° 由3°可知极限存在，又由$f_{N_2}(x)-f_{N_1}(x)$的不减性，可知$f_N(x)$是局部一致收敛的(端点处的函数值即为控制值)，因而$f(x)$连续。由1°可立得$f\in C$且

$$\|f\|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|g\|.$$

5° $f(x)$与ζ_N，ξ_N选法无关是显然的。为证（4.2.1），我们先证（$u_{1\xi}(x)$，$u_{2\zeta}(x)$如引理4.1.2所定义）：

$u_{1\xi}'(x)\to u_1'(x)$，$u_{2\zeta}'(x)\to u_2'(x)$　$(\zeta\to-\infty,\ \xi\to+\infty)$。

这是因为由齐次方程解的性质在任意$[-l,l]$上存在α_ξ，β_ξ，使

$$u_{1\xi}=\alpha_\xi u_1+\beta_\xi u_2$$

取$x=0$，得$\alpha_\xi+\beta_\xi=1$，所以

$$u_{1\xi}-u_1=(\alpha_\xi-1)(u_2-u_1)$$

再取$x=l$，得

$$(\alpha_\xi-1)(u_1(l)-u_2(l))\to 0\ \ (\xi\to+\infty)$$

因此

$$\alpha_\xi\to 1,\ \beta_\xi\to 0\ \ (\xi\to+\infty)$$

于是

$$u_{1\xi}'(x)=\alpha_\xi u_1'(x)+\beta_\xi u_2'(x)\to u_1'(x)\ \ (\xi\to+\infty)$$

同理 $u_{2\zeta}'(x)\to u_2'(x)$ $(\zeta\to-\infty)$。

由此可知(4.1.8)′中$\Delta_{\zeta\xi}(0)$。当$\zeta\to-\infty$,$\xi\to+\infty$时,是趋于(4.1.8)中的$\Delta(0)$的。但是由引理4.1.3知,$f_N(x)$有表达式(4.2.1)(其中ζ,ξ分别取ζ_N,ξ_N),注意到$0\leqslant x<\infty$时,$u_{1\xi_N}(x)\leqslant u_1(x)$，$-\infty<x\leqslant 0$时$u_{2\zeta_N}(x)\geqslant u_2(x)$,令$N\to\infty$，用Levi定理即可得(4.2.1)。可直接验证$S_\lambda^0 g$是齐次方程的一个解。

定理4.2.1. 对$g\in C$，$g\geqslant 0$，由引理4.2.1所定义的$S_\lambda^0 g$是方程

$$(\lambda-\Omega)u=g$$

的一切非负解中的最小者（即最小解),而且满足：

1° 若$0\leqslant g\leqslant 1$，则$0\leqslant\lambda S_\lambda^0 g\leqslant 1$。

2° 若$0\leqslant g_1\leqslant g_2$，则$S_\lambda^0 g_1\leqslant S_\lambda^0 g_2$。

3° 存在紧支集函数$g_n\in C$，使

$g_n\uparrow g$且$S_\lambda^0 g_n\uparrow S_\lambda^0 g$。

4° 若$g(x)\to 0$ $(x\to\pm\infty)$，则还可要求2°中的g_n满足：

$\|S_\lambda^0 g_n-S_\lambda^0 g\|\to 0$ （C空间范数)。

证明

先证最小性，设$\widetilde{f}$是$(\lambda-\Omega)u=g$的另一个非负解，于是$\widetilde{f}-f_N$是齐次方程在（ζ_N,ξ_N）具非负边值的解，由引理4.1.1. 强极大原则可知恒有

$$\widetilde{f} - f_N \geqslant 0.$$

令$N \to \infty$，即得

$$\widetilde{f} \geqslant S_\lambda^0 g.$$

1° 由引理4.2.1.4°保证。 2°由(4.2.1)保证。

3° 令

$$L_N(x) = \begin{cases} 1 & (-N \leqslant x \leqslant N) \\ \text{线性连结} & (\text{其它}x) \\ 0 & (x \leqslant -N-1\text{或}x \geqslant N+1) \end{cases}$$

及$g_N \equiv g L_N$，于是$g_N \uparrow g$，由2°可知$S_\lambda^0 g_N \uparrow$，且$S_\lambda^0 g_N \leqslant S_\lambda^0 g$，因此存在极限

$$\lim_{N \to \infty} S_\lambda^0 g_N(x) \leqslant S_\lambda^0 g(x).$$

另一方面令边值问题

$$\begin{cases} (\lambda - \Omega) u = g & (-N < x < N) \\ u(\pm N) = 0 \end{cases}$$

的解为f_N，于是，$u = S_\lambda^0 g_N - f_N$，是齐次方程具非负边值的解，由强极大原则可知在$(-N < x < N)$上$u \geqslant 0$。即

$$S_\lambda^0 g_N \geqslant f_N.$$

令$N \to \infty$，由引理4.2.1得

$$\lim_{N \to \infty} S_\lambda^0 g_N \geqslant S_\lambda^0 g$$

因此有

$$\lim_{N \to \infty} S_\lambda^0 g_N = S_\lambda^0 g.$$

4° 此时3°中的$g_N(x)$由 Dini 定理可知还满足$\| g_N - g \| \to 0$，由$S_\lambda^0 g$的表达式(4.2.1)及引理4.2.1.4°可知

$$\|S_\lambda^0 g - S_\lambda^0 g_N\| = \|S_\lambda^0(g-g_N)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|g-g_N\| \to 0 \quad (N\to\infty).$$

引理4.2.3. S_λ^0可以自然理解成C上的有界线性算子；$\|S_\lambda^0\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$. 而且有

1° $S_\lambda^0 C$与λ无关，记成$\mathscr{D}$.

2° $\{S_\lambda^0\}(\lambda>0)$满足予介方程：

$$S_\lambda^0 - S_\mu^0 = (\mu-\lambda)\, S_\lambda^0 S_\mu^0 \quad (\lambda,\mu>0).$$

3° $S_\lambda^0\mathscr{D}$在$\mathscr{D}$中稠.

证明 对$g\in C$定义

$$S_\lambda^0 g = S_\lambda^0 g^+ - S_\lambda^0 g^-$$

显然S_λ^0是线性的，而且

$$\|S_\lambda^0 g\| = \|S_\lambda^0 g^+ - S_\lambda^0 g^-\| = \max(\|S_\lambda^0 g^+\|, \|S_\lambda^0 g^-\|)$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\max(\|g^+\|, \|g^-\|) = \frac{1}{\lambda}\|g\|.$$

今证1°和2°. 首先注意在C上

$$(\lambda-\Omega)S_\lambda^0 = I \text{（单位算子）} \qquad (S_1)$$

令$C^+ = \{C$中全体非负函数$\}$，由S_λ^0在C^+上的最小性（定理4.2.1），在C^+上有

$$S_\lambda^0(I-\Omega) \leqslant I \qquad (S_2)$$

此外，显然有 $(\lambda,\mu>0)$

$$(\mu-\Omega)S_\lambda^0 = I + (\mu-\lambda)S_\lambda^0 \qquad (S_3)$$

$$(\lambda-\Omega)S_\mu^0 = I + (\lambda-\mu)S_\mu^0 \qquad (S_3')$$

不妨设$\mu>\lambda$. 由(S_3)（或(S_3')）及(S_2)得

$$S_\mu^0(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0) = S_\mu^0(\mu-\Omega)S_\lambda^0 \leqslant S_\lambda^0 \qquad (S_4)$$

$$S_\lambda^0(I+(\lambda-\mu)S_\mu^0) = S_\lambda^0(\lambda-\Omega)S_\mu^0 \leqslant S_\mu^0 \qquad (S_4')$$

由(S_4)可知

$$I=(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0)-(\mu-\lambda)S_\lambda^0$$
$$\leqslant(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0)-(\mu-\lambda)S_\mu^0(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0)$$
$$=(I+(\lambda-\mu)S_\mu^0)(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0)$$

把它和(S_4')一起利用，推得

$$S_\lambda^0\leqslant S_\lambda^0\ \ (I+(\lambda-\mu)S_\mu^0)(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0)$$
$$\leqslant S_\mu^0(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0)$$

考虑到 (S_4)是它的反向不等式，故有 ($\mu>\lambda$时)

$$S_\lambda^0=S_\mu^0(I+(\mu-\lambda)S_\lambda^0) \tag{S_5}$$

先用(S_3')，再用(S_3)，有

$$(\mu-\Omega)(\lambda-\Omega)S_\mu^0S_\lambda^0=I$$

再用(S_2)可知

$$S_\mu^0S_\lambda^0\leqslant S_\lambda^0S_\mu^0 \tag{S_6}$$

另一方面，先用(S_3)再用(S_3')，有

$$(\lambda-\Omega)(\mu-\Omega)S_\lambda^0S_\mu^0=I$$

再用(S_2)得

$$S_\lambda^0S_\mu^0\leqslant S_\mu^0S_\lambda^0 \tag{S_6'}$$

由$(S_6)(S_6')$，得

$$S_\lambda^0S_\mu^0=S_\mu^0S_\lambda^0 \tag{S_7}$$

由(S_5)及(S_7)

$$S_\mu^0=S_\lambda^0+(\lambda-\mu)S_\mu^0S_\lambda^0=S_\lambda^0(I+(\lambda-\mu)S_\mu^0) \tag{S_5'}$$

此式((S_5'))与(S_5)一起说明S_λ^0C与λ无关，且满足予解方程。

3° 因在$\mathscr{D}=S_\lambda^0C$中的函数二次连续可微，所以Ω可作用在$\mathscr{D}$上，而且在$\mathscr{D}$上有$S_\lambda^0\Omega=\Omega S_\lambda^0$。因而

$$f=(\lambda-\Omega)S_\lambda^0f=\lambda S_\lambda^0f-S_\lambda^0\Omega f$$

但$\|S_\lambda^0\Omega f\|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|\Omega f\|\to 0$ $(\lambda\to\infty)$，所以

$$\|\lambda S_\lambda^0 f-f\|\to 0\quad(\lambda\to\infty).$$

定理4.2.2. 令

$$\hat{C}=\{f(x);f\in C,\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0\}$$

$$C^*=\{f(x);f\in C,\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{分别存在}\}$$

那末

1° 若$+\infty$（或$-\infty$）为流入边界，则对$g\in C$有

$$(S_\lambda^0 g)(x)\to\frac{u_1(+\infty)}{a(0)\Delta(0)}\int_{-\infty}^{\infty}u_2(s)\,\mathrm{w}(s)\,g(s)ds\quad(x\to+\infty)\tag{4.2.2}$$

$\left(\text{或}\frac{u_2(-\infty)}{a(0)\Delta(0)}\int_{-\infty}^{\infty}u_1(s)\mathrm{w}(s)g(s)ds,\ (x\to-\infty)\right)$.所以此时在$+\infty$附近有：$S_\lambda^0$：$C\to C^*$。

2° 若$+\infty$（或$-\infty$）不是流入边界，则对$g\in\hat{C}$有

$$(S_\lambda^0 g)(x)\to 0\quad(x\to\infty)$$

（或$(S_\lambda^0 g)(x)\to 0$ $(x\to-\infty)$）。所以此时在$+\infty$附近有：

$$S_\lambda^0:\ \hat{C}\to\hat{C}.$$

3° 若$+\infty$（或$-\infty$）是正则或流出边界，则对$g\in C$有

$$(S_\lambda^0 g)(x)\to 0\quad(x\to\infty)$$

（或$(S_\lambda^0 g)(x)\to 0$ $(x\to-\infty)$）。所以此时在$+\infty$附近有：

$$S_\lambda^0:\ C\to\hat{C}.$$

4° 若$c(x)$（Ω中的自由项系数）具有紧支集，且$+\infty$（或$-\infty$）是自然边界，则对$g\in C^*$有

$$(S_\lambda^0 g)(x) \to \frac{g(\infty)}{\lambda} \qquad (x \to +\infty)$$

(或 $(S_\lambda^0 g)(x) \to \frac{g(-\infty)}{\lambda}$ $(x \to -\infty)$)。所以此时在$+\infty$附近有：

$$S_\lambda^0: C^* \to C^*。$$

证明

1° 由定理4.1.3，此时$u_2 w \in L(0, \infty; (1-c(x))dx)$，结合引理4.1.1可知

$$u_2 w \in L(-\infty, \infty)$$

由于$u_1(x)$递减，$u_2(x)$递增，所以

$$u_2(x)\int_x^\infty u_1(s)w(s)g(s)ds \leqslant \int_x^\infty u_1(x)u_2(s)w(s)ds \cdot \|g\|$$

$$\to 0 \qquad (x \to +\infty)$$

由$S_\lambda^0 g$的表达式(4.2.1)(引理4.2.1)可知(4.2.2)成立

2° 不妨假定在2°中$g \geqslant 0$。

由定理4.2.1.4°知存在支集为$[\zeta_N, \xi_N]$的C函数g_N，使$g_N \uparrow g$，$S_\lambda^0 g_N \uparrow S_\lambda^0 g$，$\|S_\lambda^0 g_N - S_\lambda^0 g\| \to 0$。$\zeta_N \downarrow -\infty$，$\xi_N \uparrow +\infty$，于是$x$充分大时

$$S_\lambda^0 g_N(x) = \frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\int_{-\infty}^x u_2(s)w(s)g_N(s)\,ds +$$

$$+u_2(x)\int_x^\infty u_1(s)w(s)g_N(s)ds\Big]$$

$$= \frac{u_1(x)}{a(0)\Delta(0)}\int_{\zeta_N}^{\xi_N} u_2(s)w(s)g_N(s)ds$$

$$\to 0 \qquad (x \to +\infty)$$

又由于$S_\lambda^0 g_N$一致收敛到$S_\lambda^0 g$，所以

$$\lim_{x \to +\infty} (S_\lambda^0 g)(x) = \lim_{x \to +\infty} \lim_{N \to \infty} (S_\lambda^0 g_N)(x)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} (S_\lambda^0 g_N)(x) = 0.$$

3° 由引理4.1.6可知，下述定义的I有限：

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)} \int_0^x (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s)dsdx < \infty$$

于是 $$I = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)} \int_0^x (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s)dsdx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N \left(\int_0^x (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s) ds \right) d\left(-\int_x^\infty \frac{dt}{a(t)\mathrm{w}(t)} \right)$$

分部积分后，即得(注意在3°假定下$\frac{1}{a\mathrm{w}} \in L(0,\infty)$)

$$I = \lim_{N\to\infty} \Big[-\int_0^N (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s)\, ds \cdot \int_N^\infty \frac{dt}{a(t)\mathrm{w}(t)}$$

$$+ \int_0^N (\lambda - c(x))\mathrm{w}(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{a(t)\mathrm{w}(t)} \Big]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\int_0^x (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s)\, ds \cdot \int_x^\infty \frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)} \right)$$

$$+ \int_0^\infty (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s) \int_s^\infty \frac{dx}{a(x)\mathrm{w}(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\int_0^x (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s)ds \cdot \int_x^\infty \frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)} \right) + I$$

因此

$$\int_0^x (\lambda - c(s))\mathrm{w}(s)\, ds \cdot \int_x^\infty \frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)} \to 0 \quad (x \to +\infty) \tag{4.2.3}$$

但由引理4.1.4及$u_2(x)$的有界性(由3°的假定)，有

$$u_1(x) = O\left(\int_x^\infty \frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)u_2(s)^2} \right)$$

$$= O\left(\int_x^{\infty}\frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)}\right) \qquad (x\to+\infty)$$

所以当$x\to+\infty$时，由(4.2.3)知

$$u_1(x)\int_{-\infty}^{x}u_2(s)\mathrm{w}(s)g(s)ds = u_1(x)\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^x\right)$$

$$= o(1)+O\left(\int_x^{\infty}\frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)}\right)\cdot O\left(\int_0^x(\lambda-c(s)u_2(s)\mathrm{w}(s)ds\right)$$

$$= o(1).$$

所以由$S_\lambda^0 g$的表达式(4.2.1)可知

$$(S_\lambda^0 g)(x)\to 0 \qquad (x\to+\infty).$$

4° 由引理4.2.1及引理4.1.1知

$$\lambda S_\lambda^0 1 = \frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\int_{-\infty}^{x}\lambda u_2(s)\mathrm{w}(s)ds$$

$$+u_2(x)\int_x^{\infty}\lambda u_1(s)\mathrm{w}(s)\,ds\Big]$$

$$= \frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\int_{-\infty}^{x}(\Omega u_2)(s)\mathrm{w}(s)ds$$

$$+u_2(x)\int_x^{\infty}(\Omega u_1)(s)\mathrm{w}(s)ds\Big]$$

$$= \frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\int_{-\infty}^{x}\Omega^*(u_2\mathrm{w})(s)ds$$

$$+u_2(x)\int_x^{\infty}\Omega^*(u_1\mathrm{w})(s)\,ds\Big]$$

分部积分后得（用引理4.1.1）

$$\lambda S_\lambda^0 1 = \frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\left(a\mathrm{w}u_2'\right)_{-\infty}^{x}+u_2\left(a\mathrm{w}u_1'\right)_x^{\infty}$$

$$+u_1(x)\int_{-\infty}^{x}c(s)u_2(s)\mathrm{w}(s)ds+$$

$$+u_2(x)\int_x^{\infty}c(s)u_1(s)w(s)ds\Big\}$$

$$=1+\frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\Big(-\lim_{s\to-\infty}a(s)w(s)u_2'(s)$$

$$+\int_{-\infty}^{x}c(s)u_2(s)w(s)\,ds\Big)$$

$$+u_2(x)\Big(\lim_{s\to+\infty}a(s)w(s)u_1'(s)$$

$$+\int_x^{\infty}c(s)u_1(s)w(s)ds\Big)\Big] \tag{4.2.4}$$

由于$\lambda S_\lambda^0 1\in C$及$u_2(x)$在$x\to+\infty$时无界，及(4.1.15) 紧支集性可知

$$\lim_{s\to+\infty}a(s)w(s)u_1'(s)=0,$$

且

$$(\lambda S_\lambda^0 1)(x)\to 1 \qquad (x\to+\infty).$$

对于$g\in C^*$，则$g(x)-g(+\infty)\to 0$ $(x\to+\infty)$，由2°可得

$$S_\lambda^0(g(x)-g(+\infty))\to 0 \qquad (x\to+\infty).$$

于是 $(S_\lambda^0 g)(x)=S_\lambda^0 g(\infty)+S_\lambda^0(g(x)-g(\infty))$

$$=g(\infty)S_\lambda 1+S_\lambda^0(g(x)-g(\infty))$$

$$\to\frac{g(\infty)}{\lambda} \qquad (x\to+\infty).$$

注：对于$+\infty$为自然边界的情况，为保证$S_\lambda^0C^*\subset C^*$，像“$c(x)$为紧支集”这一类条件是需要的。今举反例如下：

令

$$a(x)=e^{-\sin x}$$

$$b(x)=-a'(x)$$

$$c(x)=-[e^{-\sin x}(12+\cos^2 x-\sin x)-1]$$

显然$a(x)>\frac{1}{3}$，$c(x)<0$。

于是

$$\mathrm{w}(x)=e^{\sin x}\overline{\in}L(-\infty,\ \infty),\ \frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\overline{\in}L(-\infty,\ \infty)$$

因而

$$m(\pm\infty)=\infty,\ s(\pm\infty)=\infty$$

所以$\pm\infty$可能是流入或自然边界（定理4.1.1至定理4.1.4）。

取$\lambda_0=1$，则$\frac{1}{12}e^{\sin x}$是方程

$$(\lambda-\Omega)u=1,\text{即}\quad(\lambda_0-c(x))u-(au')'-bu'=1$$
$$(\text{即}(\lambda_0-c(x)u-au''=1)$$

的一个解，所以这个算符Ω的最小解应能写成

$$S_{\lambda_0}^0 1=\frac{1}{12}e^{\sin x}+\beta_1 u_1(x)+\beta_2 u_2(x)$$

由于$(S_{\lambda_0}^0 1)(x)\in C$，而$u_1(x)$，$u_2(x)$今均无界(流入或自然情况)，因而必须有$\beta_1=\beta_2=0$，于是

$$S_{\lambda_0}^0 1=\frac{1}{12}e^{\sin x}\overline{\in}C^*.$$

因此$S_{\lambda_0}^0 C^*\not\subset C^*$。

由定理4.2.2.1°可知，本例之$\pm\infty$不可能为流入边界，因而$\pm\infty$均为自然边界。

引理4.2.4. 若在$+\infty$处$u_2(x)$无界(即$+\infty$为流入或自然)，则

$$\lim_{x\to+\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_1'(x)=0 \qquad (4.2.5)$$

(同理，当在$-\infty$处$u_1(x)$无界，则$\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_2'(x)=0$)

证明　此时(包括流入边界情况)有(4.2.4),所以(4.2.5)成立。

定理4.2.3.　对$f\in C^*$，则$u=S_\lambda^0 f$是

$$(\lambda-\Omega)u=f$$

有如下边值条件的唯一解：

$u(+\infty)=0$，(或$u(-\infty)=0$) (当$+\infty$(或$-\infty$)为正则或流出边界时)

$(\Omega u)(+\infty)=0$，(或$(\Omega u)(-\infty)=0$)

(当$+\infty$(或$-\infty$)为自然边界且$c(x)$具有紧支集时)

$(a\mathrm{w}u')(+\infty)=0$，(或$(a\mathrm{w}u')(-\infty)=0$)

(当$+\infty$(或$-\infty$)为流入边界时)

而对$f\in\hat{C}$，$u=S_\lambda^0 f$是同方程具有如下条件之解：

$u(\pm\infty)=0$。(当$\pm\infty$均不为流入边界时)

证明　除流入边界情况外，均为定理4.2.2的明显推论。

在流入边界情况有$u_i\mathrm{w}\in L((-\infty,+\infty);(1-c(x))dx)$ $(i=1,2)$.由(4.1.14)知

$$(a\mathrm{w}u_i')(x)=(a\mathrm{w}u_i')(0)+\int_0^x(\lambda-c(x))u_i(x)\mathrm{w}(x)dx$$

是有界的，所以

$$(a\mathrm{w}u')(x)=\frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big\{(a\mathrm{w}u_1')(x)\int_{-\infty}^x u_2(s)\mathrm{w}(s)f(s)$$

$$+(a\mathrm{w}u_2')(x)\int_x^\infty u_1(s)\mathrm{w}(s)f(s)\,ds\Big]$$

由$(a\mathrm{w}u_1')(x)\to 0(x\to+\infty)$，$(a\mathrm{w}u_2')(x)\to 0(x\to-\infty)$，故$(a\mathrm{w}u')(\pm\infty)=0$。

因为$f=0$时满足边值的解$c_1u_1+c_2u_2$，必须有$c_1=c_2=0$，所以边值问题的解是唯一的。

引理4.2.6. 设

$C_0=\{f(x);f\in C,\ f$有紧支集$\}$

$C_2^0=\{f(x);f$有紧支集，且二次连续可微$\}$

则 $C_2^0\subset S_\lambda^0 C_0$.

证明 若$f\in C_2^0$，则 $g=(\lambda-\Omega)f\in C_0$。对 $S_\lambda^0 g=S_\lambda^0(\lambda-\Omega)f$用(4.2.1)及引理4.1.1得

$$(S_\lambda^0 g)(x)=\frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\int_{-\infty}^{x}u_2(s)(\lambda-\Omega)^*(\mathrm{w}f)(s)ds$$

$$+u_2(x)\int_{x}^{\infty}u_1(s)(\lambda-\Omega)^*(\mathrm{w}f)(s)ds\Big]$$

分部积分后，利用$f\in C_2^0$；消去同项后得

$$(S_\lambda^0 g)(x)=\frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big[a(x)\Delta(x)\mathrm{w}(x)f(x)$$

$$+u_1(x)\int_{-\infty}^{x}\mathrm{w}(s)f(s)(\lambda-\Omega)u_2(s)ds$$

$$+u_2(x)\int_{x}^{\infty}\mathrm{w}(s)f(s)(\lambda-\Omega)u_1(s)ds\Big]$$

$$=f(x)$$

即

$$f(x)=S_\lambda^0 g\in S_\lambda^0 C_0.$$

§4.3. 转移密度的存在

我们先令

$C_\infty=\{f;\ f\in C^*,\ 且f(-\infty)=0\}$.

$C_{-\infty}=\{f;\ f\in C^*,\ 且f(+\infty)=0\}$.

在$c(x)\neq 0$时；令

$$\mathcal{E}=\begin{cases}\hat{C} & (\text{若}\pm\infty\text{中无一为流入边界})；\\ \overline{S_\lambda^0 C^*} & (\text{若}\pm\infty\text{均为流入边界})(\text{“—”指闭包})；\\ \overline{S_\lambda^0 C_\infty} & (\text{若只有}+\infty\text{为流入边界})；\\ \overline{S_\lambda^0 C_{-\infty}} & (\text{若只有}-\infty\text{为流入边界})。\end{cases}$$

在$c(x)\equiv 0$时，令

$$\mathcal{E}=\overline{S_\lambda^0 C^*}$$

$$R_\lambda^0=S_\lambda^0\Big|_{\mathcal{E}}\quad (S_\lambda^0\text{在}\mathcal{E}\text{上的限制})$$

$$A^0=\Omega\Big|_{R_\lambda^0\mathcal{E}}\quad (\Omega\text{在}R_\lambda^0\mathcal{E}\text{上的限制})。$$

即

$$\mathcal{D}(A)=R_\lambda^0\mathcal{E}。$$

引理4.3.1. $\mathcal{E}=\overline{R_\lambda^0\mathcal{E}}$，$C_2^0\subset\mathcal{D}(A^0)$。

证明 由定理4.2.2立即可得$R_\lambda^0\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$·又和引理4.2.3.3°类似地可证：

$$\overline{S_\lambda^0\overline{S_\lambda^0 C^*}}=\overline{S_\lambda^0 C^*},\quad \overline{S_\lambda^0\overline{S_\lambda^0 C_\infty}}=\overline{S_\lambda^0 C_\infty},\quad \overline{S_\lambda^0\overline{S_\lambda^0 C_{-\infty}}}=\overline{S_\lambda^0 C_{-\infty}}$$

另一方面，由引理4.2.6.可得$C_2^0\subset S_\lambda^0 C_0\subset R_\lambda^0\mathcal{E}$，故 $\hat{C}\subset\overline{C_2^0}\subset$ $\subset\overline{R_\lambda^0\mathcal{E}}$，所以无论哪一类边界均有

$$\mathcal{E}=\overline{R_\lambda^0\mathcal{E}}\,,\ C_2^0\subset S_\lambda^0 C_0\subset R_\lambda^0\mathcal{E}=\mathcal{D}(A^0)。$$

引理4.3.2. $\{R_\lambda^0\lambda>0\}$是$\mathcal{E}$上某个强连续收缩正半群T_t^0的预解式，T_t^0的生成元即是A^0，$C_2^0\subset\mathcal{D}(A^0)$。$T_t^0$在如下含义下最小：

若另有一个在C的子空间$\mathcal{E}'$上强连续收缩正半群T_t'，满足$\mathcal{E}'\supset\mathcal{E}$且其生成元$A'$有$\mathcal{D}(A')\subset C_2$及

$$A'=\Omega\Big|_{\mathcal{D}(A')}$$

那末对任意 $f\in\mathcal{E}$且$f\geqslant 0$，必有

$$T_t^0 f\leqslant T_t' f.$$

证明 由 *Hille-Yosida*定理[7]的证明可用下述公式定义半群

$$T_t^0 f=(\text{按}C\text{范数})\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}(\lambda R_\lambda)^k f \tag{4.3.1}$$

今证最小性：设T_t'的予解式为R_λ'，对任$f\in\mathcal{E}$

$$f=(\lambda-A')R_\lambda' f$$

但$R_\lambda' f\in\mathcal{D}(A')\subset C_2$，所以

$$f=(\lambda-\Omega)R_\lambda' f$$

所以，当$f\geqslant 0$时，有 $S_\lambda^0 f\leqslant R_\lambda' f$，即$R_\lambda^0 f\leqslant R_\lambda' f$。

由公式(4.3.1)立知$T_t^0 f\leqslant T_t' f$。

对引理4.3.2定义的最小$\mathcal{E}$半群T_t^0，在x、t固定时$T_t^0 f(x)$是$\mathcal{E}$上的一个有界线性正($f\geqslant 0$，则 $T_t^0 f(x)\geqslant 0$) 泛函，记成 $\Psi_{x,t}(f)$。由 *Hahn-Banach*定理[7]，它可以保持原来的模扩张到C^*上，仔细分析 *Hahn-Banach*定理的证明过程可以看出这扩张还可选得仍保持泛函的正性。由C^*上有界线性泛函的*Riesz*表示定理，存在一个$[-\infty,\infty]$上有限正测度$P_0(t,x,\Gamma)$，满足$P_0(t,x,[-\infty,\infty])\leqslant 1$，使

$$\Psi_{x,t}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)P_0(t,x,dy)+f(+\infty)P_0(t,x,\{+\infty\})$$
$$+f(-\infty)P_0(t,x,\{-\infty\}).$$

特别对$f\in\mathcal{E}$，有

$$T_t^0 f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)P_0(t,x,dy)+f(+\infty)P_0(t,x,\{+\infty\})$$
$$+f(-\infty)P(t,x,\{-\infty\}). \tag{4.3.2}$$

令

$$L_2(\mathrm{w})=\{f:\ \|f\|_2^2=\int |f(x)|^2\mathrm{w}(x)dx<\infty\}.$$

(本章中$\|f\|$恒指C范数，$\|f\|_2$恒指$L_2(\mathrm{w})$范数)。

我们要从Ω出发作一个$L_2(\mathrm{w})$对称半群。

引理4.3.3. S_λ^0在$L_2(\mathrm{w})$上可用(4.2.1)定义，而且

$$S_\lambda^0: L_2(\mathrm{w})\longrightarrow L_2(\mathrm{w}).$$

同时 $S_\lambda^0 g(g\in L_2(\mathrm{w}))$为连续函数。

证明 由引理4.1.2.可知 $u_1^2\mathrm{w}\in L(0,\infty)$,$u_2^2\mathrm{w}\in L(-\infty, 0)$，所以对$g\in L_2(\mathrm{w})$

$$(S_\lambda^0 g)(x) = \frac{1}{a(0)\Delta(0)}\Big(u_1(x)\int_{-\infty}^{x} u_2(s)\mathrm{w}(s)g(s)ds$$

$$+u_2(x)\int_{\infty}^{x} u_1(s)\mathrm{w}(s)g(s)\,ds \Big)$$

有确切含义且连续。把上式写成

$$(S_\lambda^0 g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G_\lambda(x,y)g(y)\mathrm{w}(y)dy$$

其中

$$G_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a(0)\Delta(0)}u_1(x)u_2(y) & (y<x) \\ \dfrac{1}{a(0)\Delta(0)}u_2(x)u_1(y) & (y\geqslant x)\end{cases}$$

于是用*Schwarz*不等式

$$(S_\lambda^0 g)(x)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\lambda G_\lambda(x,y)g(y)\mathrm{w}(y)dy\Big)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda G_\lambda(x,y)\mathrm{w}(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}\lambda G_\lambda(x,y)g(y)^2\mathrm{w}(y)dy$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}(\lambda S_\lambda^0 1)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\lambda G_\lambda(y,x)g(y)^2\mathrm{w}(y)dy$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda G_\lambda(y,x)g(y)^2 \mathrm{w}(y)dy.$$

所以用$Fubini$定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}(S_\lambda^0 g)(x)^2 \mathrm{w}(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\lambda G_\lambda(y,x)\mathrm{w}(x)dx\right)g(y)^2 \mathrm{w}(y)dy$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)^2 \mathrm{w}(y)dy.$$

引理4.3.4. 令

$$\widetilde{A}_0 = \Omega\Big|_{S_\lambda^0(L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E})}$$

(由$L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E}$在$S_\lambda^0$作用下之不变性及予解方程，显然可知$(S_\lambda^0 L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E})$(与$\lambda$无关)，则$\widetilde{A}_0$在$L_2(\mathrm{w})$上有一个非正自伴扩张$\widetilde{A}$，由此能生成一个$L^2(\mathrm{w})$上以$\widetilde{A}$为生成元的对称收缩强连续半群$\widetilde{T}t$。

证明

1° 首先证明，对$f,g\in C_2^0$，有

$$(\Omega f,g)=(f,\Omega g) \tag{4.3.3}$$

$$(\Omega f,f)\leqslant 0$$

其中(f,g)指$L_2(\mathrm{w})$中元素f与g的内积。

这是因为由分部积分可得

$$(\Omega f,g)=[a\mathrm{w}f'g-a\mathrm{w}fg']_{-\infty}^{\infty}+(f,\ \Omega g)$$

$$(\Omega f,f)=[a\mathrm{w}f'f]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}[-a(s)f'(s)^2+c(s)f(s)^2]\mathrm{w}(s)ds\leqslant$$

0之故。

2° (4.3.3)对f,g在(ζ,ξ)上属于C_2且其支集在$[\zeta,\xi]$的连续函数时仍对。

这只需把1°中$(-\infty,\ \infty)$改为$[\zeta,\xi]$，其它完全一样地证明。

3° 对$f,g\in S_\lambda^0C$，$f,g\geqslant 0$，(4.3.3)仍然成立。

对f,g，存在φ，$\psi\in C$，使 $f=S_\lambda^0\varphi$，$g=S_\lambda^0\psi$。

令

$$f_N(x)=\begin{cases}\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=\varphi\\ u(\zeta_N)=u(\xi_N)=0\end{cases}\text{之解} & (\zeta_N<x<\xi_N)\\ 0 & (\text{其它}x)\end{cases}$$

而$g_N(x)$为在上式中把φ换成ψ后所得的函数，于是$f_N,g_N\in C_0$。由引理4.2.1可知$f_N\uparrow f$，$g_N\uparrow g$。但是在(ζ_N,ξ_N)上显然有

$$\Omega f_N=\lambda f_N-\varphi$$

$$\Omega g_N=\lambda g_N-\psi$$

在$[\zeta_N,\xi_N]$外则有(在ζ_{N1}，ξ_N二点Ω无定义)

$$\Omega f_N=\Omega g_N=0$$

所以

$$\Omega f_N\uparrow\lambda f-\varphi=\Omega f\qquad p.p.\ \mathrm{w}dx$$

$$\Omega g_N\uparrow\lambda g-\psi=\Omega g\qquad p.p.\ \mathrm{w}dx$$

由$Levi$定理

$$(\Omega f_N,g_N)\to(\Omega f,g),\ (f_N,\Omega g_N)\to(f,\Omega g)$$

$$(\Omega f_N,f_N)\to(\Omega f,f)$$

因而(4.3.3)成立。

如果φ,ψ还属于$L_2(\mathrm{w})$，那末由引理4.3.3，$f,g\in L_2(\mathrm{w})$，所以Ωf，$\Omega g\in L_2(\mathrm{w})$，此时(4.3.3)式不仅成立，而且还是有限值。

4° 对$\varphi,\psi\in L_2(\mathrm{w})$，那末对$f=S_\lambda^0\varphi$，$g=S_\lambda^0\psi$成立(4.3.3)。

这是因为此时

$$\varphi^+,\ \varphi^-,\ \psi^+,\ \psi^-\in L_2(\mathrm{w})$$

故由引理4.3.3，$S_\lambda^0\varphi^+$，$S_\lambda^0\varphi^-$，$S_\lambda^0\psi^+,S_\lambda^0\psi^-\in L_2(\mathrm{w})$，因而(4.3.3)

第一式满足。

又设以$S_t^0\varphi^+$，$S_t^0\varphi^-$分别代替3°中的f后，所得相应于f_N的函数分别记为$f_N^{(+)}$，$f_N^{(-)}$，则从3°中结论可得

$$\begin{cases}\|f_N^{(+)}-S_t^0\varphi^+\|\to 0, & \|f_N^{(-)}-S_t^0\varphi^-\|\to 0\\ \|\Omega f_N^{(+)}-\Omega S_t^0\varphi^+\|\to 0, & \|\Omega f_N^{(-)}-\Omega S_t^0\varphi^-\|\to 0\end{cases}$$

因此 $f_N\equiv f_N^{(+)}-f_N^{(-)}\to f \quad (L_2(\mathrm{w})), \Omega f_N\to\Omega f(L_2(\mathrm{w}))$

但是f_N满足2°，于是

$$(\Omega f_N,\ f_N)\leqslant 0.$$

令$N\to\infty$，得$(\Omega f,f)\leqslant 0$，此即(4.3.3)第二式。

5° 由1°－4°可知，对$f,g\in\mathscr{D}(\widetilde{A}_0)$，有

$$(\widetilde{A}_0 f,g)=(f,\ \widetilde{A}_0 g),\ \ (\widetilde{A}_0 f,f)\leqslant 0$$

又由引理4.2.6，$C_2^0\subset S_t^0 C_0\subset S_t^0(L_2(\omega)\cap\mathscr{E})=\mathscr{D}(\widetilde{A}_0)$，及$C_2^0$在$L_2(\mathrm{w})$的稠性，可知$\widetilde{A}_0$是$L_2(\mathrm{w})$上非正对称算子，因此它在$L_2(\mathrm{w})$上可有一个非正自伴扩张（即Friedlich扩张[7]）$\widetilde{A}$。由谱分解定理[7]

$$\widetilde{A}=\int_{-\infty}^0\lambda dE(\lambda),$$

以$\widetilde{A}$为生成元的$L_2(\mathrm{w})$对称收缩强连续半群为

$$\widetilde{T}_t=\int_{-\infty}^0 e^{\lambda t}dE(\lambda).$$

引理4.3.5. *Hilbert*空间H上的强连续收缩半群T_t为对称的充要条件为其生成元$\widetilde{A}$为自伴非正算子，在条件成立下，恒有（$\|\cdot\|_2$记H上范数）：

$$\|\widetilde{T}_t f\|_2^2+\|\widetilde{A}\widetilde{T}_t f\|_2^2\leqslant k\|f\|_2^2$$

此处$f\in H$，k可与t有关。

证明 充分性：已含于上一引理之中。

必要性：设$\widetilde{T}_t$的予解式为$\widetilde{R}_\lambda$，由予解关系$\widetilde{R}_\lambda-\widetilde{R}_\mu=(\mu-\lambda)\widetilde{R}_\lambda\widetilde{R}_\mu$可得$\widetilde{R}_\lambda$对$\lambda$连续，可微。

$$\|\widetilde{R}_{\lambda+\Delta\lambda}-\widetilde{R}_\lambda\|_2\leqslant\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\left\|\frac{\widetilde{R}_{\lambda+\Delta\lambda}-\widetilde{R}_\lambda}{\Delta\lambda}-(-\widetilde{R}_\lambda^2)\right\|_2\leqslant\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

R_λ的强微商为$-\widetilde{R}_\lambda{}^2$，由$T_t$对称知$\widetilde{R}_\lambda$对称，故$-\widetilde{R}_\lambda{}^2$是非正算子，因此$(\widetilde{R}_\lambda f,f)$有负的微商 $(-\widetilde{R}_\lambda{}^2f,f)$即$(\widetilde{R}_\lambda f,f)\downarrow$。但$(\widetilde{R}_\lambda f,f)=\frac{1}{\lambda}(\lambda R_\lambda f,f)\to\frac{(f,f)}{\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda}=0$，因而$(\widetilde{R}_\lambda f,f)\geqslant0$，即$\widetilde{R}_\lambda$为正算子。

但$\lambda I-\widetilde{A}=\widetilde{R}_\lambda{}^{-1}$是自伴正算子之逆，故自伴且正，于是$(-\widetilde{A}f,f)=\lim\limits_{\lambda\to0}(\widetilde{R}_\lambda{}^{-1}f,f)\geqslant0$，即$-A$正对称。又$-A=R^{-1}-\lambda I$，故$A$非正、自伴。

在条件成立下有

$$\widetilde{A}\widetilde{T}_tf=\int_{-\infty}^{0}\lambda e^{\lambda t}dE(\lambda)f$$

由于$|\lambda te^{\lambda t}|\leqslant\alpha$（依赖于$t$的常数），立得

$$\|\widetilde{T}_tf\|_2^2+\|\widetilde{A}\widetilde{T}_tf\|_2^2\leqslant\left(1+\frac{\alpha^2}{t^2}\right)\|f\|_2^2 \qquad (4.3.4)$$

取$k=1+\frac{\alpha^2}{t^2}$即可。

引理4.3.6. 设S_λ满足下述条件之一：($\lambda>0$)

1° $S_\lambda = S_\lambda^0$；

2° S_λ 是 C^* 上不同于 S_λ^0 的另一个予解式 （指满足 $S_\lambda - S_\mu = (\mu-\lambda)S_\lambda S_\mu$，$(\lambda-\Omega)S_\lambda = I$，且把$0\leqslant u\leqslant 1$变为$0\leqslant \lambda S_\lambda u\leqslant 1$的有界线性算子族；在$\pm\infty$为流入或自然边界时，不同于$S_\lambda^0$的这样的$S_\lambda$显然不存在），又设它满足：

$$S_\lambda(L_2(\mathrm{w})\cap\mathscr{E})\subset L_2(\mathrm{w}) \qquad (\text{这里}\mathscr{E}\equiv\overline{S_\lambda C^*})$$

同时还假定在$L_2(\mathrm{w})$上存在一个对称强连续收缩半群 $\widetilde{T}_t$，它的予解式$\widetilde{R}_\lambda$是S_λ的某个扩张：

$$\widetilde{R}_\lambda f = S_\lambda f \quad (p.p.\ \mathrm{w}(x)dx,\ \text{当}f\in L_2(\mathrm{w})\cap\mathscr{E}\text{时})$$

记$\widetilde{T}_t$的生成元为$\widetilde{A}$，

那末恒有(不管是1°下还是2°下)：

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{R}_\lambda f = S_\lambda f,\quad \widetilde{R}_\lambda^0 f = S_\lambda^0 f\\ \widetilde{A}\widetilde{R}_\lambda f = \Omega S_\lambda f\end{array}\right\} (p.p.\ \mathrm{w}(x)dx,\text{而}f\in L_2(\mathrm{w})\cap\mathscr{E}) \tag{4.3.5}$$

(在1°假定下$\widetilde{A}$，$\widetilde{R}_\lambda$如引理4.3.4所定义)，即$S_\lambda f$是$\widetilde{R}_\lambda f$的连续修正，而且对任意$g\in S_\lambda(L_2(\mathrm{w})\cap\mathscr{E})$，有

$$|g(x)|\leqslant\alpha\,|||g||| \tag{4.3.6}$$

其中α为与x、λ有关而与g无关的常数，而

$$|||g|||^2\equiv\|g\|_2^2+\|\widetilde{A}g\|_2^2.$$

(由(4.3.5)此时$\widetilde{A}g=\Omega g\ \ p.p.\ \mathrm{w}(x)dx$)。

证明

在情况2°时，(4.3.5)成立是假定的要求，今证在情况1°时，(4.3.5)仍成立。由引理4.3.4，

$$S_\lambda^0 f \in S_\lambda^0(L_2(\mathrm{w}) \cap \mathcal{E}) = \mathcal{D}(\widetilde{A}_0)$$

所以在$L_2(\mathrm{w})$意义下

$$\widetilde{R}_\lambda f = \widetilde{R}_\lambda(\lambda - A)S_\lambda^0 f = \widetilde{R}_\lambda(\lambda - \Omega)S_\lambda^0 f$$

$$= \widetilde{R}_\lambda(\lambda - \widetilde{A}_0)S_\lambda^0 f = \widetilde{R}_\lambda(\lambda - \widetilde{A})S_\lambda^0 f = S_\lambda^0 f,$$

此即(4.3.5)前式，又

$$\widetilde{A}\widetilde{R}_\lambda f = \lambda\widetilde{R}_\lambda f - f = \lambda S_\lambda^0 f - f = A S_\lambda^0 f.$$

下面证明(4.3.6)。设$g = S_\lambda f$，$f \in L_2(\mathrm{w}) \cap \mathcal{E}$。

令$u_{1, x_0, r}(x)$，$u_{2, x_0, r}(x)$分别为下二方程之解：

$$\begin{cases} (\lambda - \Omega)u = 0, \\ u(x_0) = 1, u(x_0 + r) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (\lambda - \Omega)u = 0, \\ u(x_0) = 1, \ u(x_0 - r) = 0. \end{cases}$$

因此(引理4.1.1强极大原则)$u_{1, x_0, r}(x)$递减，$u_{2, x_0, r}(x)$递增。由于$g \in S_\lambda(L_2(\mathrm{w}) \cap \mathcal{E})$，故 $g = S_\lambda f$ 还可写成

$$g(x) = C_1 u_{1, x_0, r}(x) + C_2 u_{2, x_0, r}(x) + C_{x_0, r}$$

$$\left[u_{1, x_0, r}(x)\int_{x_0 - r}^{x} u_{2, x_0, \gamma}(s)\mathrm{w}(s)f(s)ds + \right.$$

$$\left. u_{2, x_0, r}(x)\int_{x}^{x_0 + r} u_{1, x_0, \gamma}(s)\mathrm{w}(s)f(s)ds\right]$$

其中

$$C_1 = g(x_0 - r)/u_{1, x_0, r}(x_0 - r),$$

$$C_2 = g(x_0 + r)/u_{2, x_0, r}(x_0 + r),$$

$$C_{x_0, r} = \frac{1}{a(x_0)\mathrm{W}(x_0)(u'_{2, x_0, r}(x_0) - u'_{1, x_0, r}(x_0))},$$

所以

$$|g(x_0)|\leq|g(x_0-r)|+|g(x_0+r)|+C_{x_0,r}\int_{x_0-r}^{x_0+r}w(s)|f(s)|ds.$$

令

$$\hat{a}(x)=a(x+x_0)$$

$$\hat{b}(x)=b(x+x_0)$$

$$\hat{c}(x)=c(x+x_0)$$

$$\hat{\Omega}u=(\hat{a}(x)u')'+\hat{b}(x)u'+\hat{c}(x)u$$

那么

$$u_{1,x_0,r}(x)=\hat{u}_{1,r}(x)\longrightarrow\hat{u}_1(x)\qquad(r\to+\infty)$$

$$u_{2,x_0,r}(x)=\hat{u}_{2,-r}(x)\longrightarrow\hat{u}_2(x)\qquad(-r\longrightarrow-\infty)$$

其中$\hat{u}_{1,\xi}$，$\hat{u}_{2,\zeta}$ ($\xi=r,\zeta=-r$)，$\hat{u}_1$，$\hat{u}_2$分别是算符$\hat{\Omega}$在引理 4.1.2 中所定义的$u_{1\xi}$，$u_{2\zeta}$，u_1，u_2。

由引理4.2.1.5°段的证明还可知：

$$\hat{u}'_{1,r}(x)\longrightarrow\hat{u}'_1(x)$$

$$\hat{u}'_{2,-r}(x)\longrightarrow\hat{u}'_2(x)\qquad(r\to+\infty)$$

所以

$$u'_{2,x_0,r}(x_0)-u'_{1,x_0,r}(x_0)\longrightarrow\hat{u}'_2(x_0)-\hat{u}'_1(x_0)>0.$$

又由引理4.2.1知，当$r_1<r_2$时$\hat{u}_{1,r_1}\leq\hat{u}_{1,r_2}$，于是由

$$\hat{u}'_{1,r_1}(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\hat{u}_{1,r_1}(x_0+\Delta x)-\hat{u}_{1,r_1}(x_0)}{\Delta x}$$

及 $\hat{u}_{1,r_1}(x_0)=\hat{u}_{1,r_2}(x_0)=1$，得

$$\hat{u}'_{1,r_1}(x_0)\leqslant\hat{u}'_{1,r_2}(x_0)$$

类似地 $\hat{u}'_{2,-r_1}(x_0)\leqslant\hat{u}'_{2,-r_2}(x_0)$，因而

$$\hat{u}'_{2,-r}(x_0)-\hat{u}'_{1,r_r}(x_0)\text{ 对}r\downarrow.$$

综上可知：

$$u'_{2,x_0,r}(x_0)-u'_{1,x_0,r}(x_0)\geqslant\hat{u}'_2(x_0)-\hat{u}'_1(x_0)>0$$

由此得

$$|C_{x_0,r}|\leqslant\frac{1}{a(x_0)\mathrm{w}(x_0)(u'_2(x_0)-u'_1(x_0))}\overset{\text{记为}}{=\!=}C_{x_0}$$

所以

$$|g(x_0)|\leqslant|g(x_0-r)|+|g(x_0+r)|+C_{x_0}\int_{x_0-r}^{x_0+r}\mathrm{w}(s)|f(s)|ds$$

再r自0积分至R，得

$$|g(x_0)|\leqslant\frac{1}{R}\int_0^R|g(x_0-r)|dr+\frac{1}{R}\int_0^R|g(x_0+r)|dr$$

$$+C_{x_0}\frac{1}{R}\int_0^R\int_{x_0-r}^{x_0+r}\mathrm{w}(s)|f(s)|dsdr$$

$$=\frac{1}{R}\int_{x_0-R}^{x_0}|g(s)|ds+\frac{1}{R}\int_{x_0}^{x_0+R}|g(s)|ds$$

$$+C_{x_0}\frac{1}{R}\Big(\int_{x_0-R}^{x_0}(R-x_0+s)\mathrm{w}(s)|f(s)|ds$$

$$+\int_{x_0}^{x_0+R}(R-s+x_0)\mathrm{w}(s)|f(s)|ds\Big)$$

$$\leqslant\frac{1}{R}\int_{x-R}^{x_0+R}|g(s)|ds+C_{x_0}\int_{x_0-R}^{x_0+R}\mathrm{w}(s)|f(s)|ds$$

设$w(s)$在$[x_0-R,x_0+R]$的最小值为$\delta_{x_0,R}$，那末

$$|g(x_0)|\leqslant\frac{1}{\delta_{x_0,R}\cdot R}\int_{x_0-R}^{x_0+R}|g(s)|w(s)ds+$$

$$C_{x_0}\int_{x_0-R}^{x_0+R}|f(s)|w(s)ds\leqslant\left(\frac{1}{\delta_{x_0,R}\cdot R}+C_{x_0}\right)\left(\int_{x_0-R}^{x_0+R}w(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\left(\int_{x_0-R}^{x_0+R}|g(s)|^2w(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{x_0-R}^{x_0+R}|f(s)|^2w(s)ds\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\alpha_{x_0,R}\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(s)^2w(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|^2w(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

其中($\alpha_{x_0,R}$为某个常数)，但是$g=S_\lambda f=\widetilde{R}_\lambda f$，故$f=\lambda g-\widetilde{A}g$，因此

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(s)^2w(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}g(s)^2w(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\widetilde{A}g)(s)^2w(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

于是

$$|g(x_0)|\leqslant\alpha_{x_0,R}(\lambda+1)(\|g\|_2+\|\widetilde{A}g\|_2)$$

$$\leqslant2(\lambda+1)\alpha_{x_0,R}(\|g\|_2^2+\|\widetilde{A}g\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

即存在常数$\alpha_{x,R,\lambda}$，使

$$|g(x)|\leqslant\alpha_{x,R,\lambda}|||g|||.$$

R可以取定，这常数确实与g无关。

引理4.3.7. 在引理4.3.6条件下，对$f\in\mathcal{E}\cap L_2(w)$有与$f$无关但与$\lambda$、$x$有关的常数$\alpha$，使

$$|\widetilde{R}_\lambda f(x)|^2\leqslant\alpha^2(\|\widetilde{R}_\lambda f\|_2^2+\|\widetilde{A}\widetilde{R}_\lambda f\|_2^2) \tag{4.3.7}$$

(这里假定$\widetilde{R}_\lambda f$已取连续修正)又设S_λ在$\mathcal{E}$生成的强连续半群为T_t(在引理4.3.6情况2°时,因$\mathcal{E}=\overline{S_\lambda C^*}$,可用(4.3.1)构造半群$T_t$),那末其生成元$A$有$\mathcal{D}(A)=S_\lambda\mathcal{E}$,且对$f\in L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E}$有

$$T_t f=\widetilde{T}_t f\qquad p.p.\mathrm{w}(x)dx \tag{4.3.8}$$

即$T_t f$是$\widetilde{T}_t f$的连续修正(以后不妨总取它为$\widetilde{T}_t f$)。

在$S_\lambda=S_\lambda^0$时,对$f\in C_2^0$还有

$$|\widetilde{T}_t f(x)|^2\leqslant\alpha^2(\|\widetilde{T}_t f\|_2^2+\|\widetilde{A}\widetilde{T}_t f\|_2^2) \tag{4.3.9}$$

$$|\widetilde{T}_t f(x)|\leqslant k\|f\|_2 \tag{4.3.10}$$

证明 对(4.3.5)两边分别在$L_2(\mathrm{w})$,C中用公式(4.3.1)即得(4.3.8)。由(4.3.5)可知(4.3.7)就是(4.3.6)。

在$S_\lambda\equiv S_\lambda^0$时,固定某个$\lambda$对$f\in C_2^0$,由引理4.2.6存在$g\in C_0\subset L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E}$,使$f=S_\lambda^0 g$。于是由(4.3.5)及(4.3.8)得 $\widetilde{T}_t f=T_t^0 f=T_t^0 S_\lambda^0 g=T_t^0\widetilde{R}_\lambda g=\widetilde{T}_t\widetilde{R}_\lambda g=\widetilde{R}_\lambda\widetilde{T}_t g$。用(4.3.7),

$$\begin{aligned}|\widetilde{T}_t f(x)|^2&\leqslant\alpha^2(\|\widetilde{R}_\lambda\widetilde{T}_t g\|_2^2+\|\widetilde{A}\widetilde{R}_\lambda\widetilde{T}_t g\|_2^2)\\&=\alpha^2(\|\widetilde{T}_t f\|_2^2+\|\widetilde{A}\widetilde{T}_t f\|_2^2)\end{aligned}$$

此即(4.3.9)。由它及引理4.3.5得到(4.3.10)。

定理4.3.1. 在引理4.3.6条件下,如果对$f\in C_2^0$满足:1°存在测度$P_{t,x}(\Gamma)$: $P_{t,x}([-\infty,\infty])\leqslant 1$, $T_t f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)P_{t,x}(dy)$

$$2^\circ\quad|\widetilde{T}_t f(x)|\leqslant k\|f\|_2 \tag{4.3.11}$$

则存在一个转移密度$P(t,x,y)$,使对$f\in L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E}$有

$$T_t f(x)=\widetilde{T}_t f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)p(t,x,y)dy \tag{4.3.12}$$

(如果(4.3.11)还对$f\in C_2^*$满足，则显然(4.3.12)对$f\in C_2^*$也对，其中$C_2^*=\{f(x);\ f\in C_2,\exists[\alpha,\beta],f(x)=f(\alpha)(x\leqslant\alpha),f(x)=f(\beta)(x\geqslant\beta)\}$

又对最小解S_t^0恒存在一个转移密度$p_0(t,x,y)$，使对$f\in L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E}$有

$$T_t^0f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)p_0(t,x,y)dy \qquad (4.3.12)'$$

证明

对x、$t(>0)$固定，由(4.3.11)可知当$f\in C_2^0$时$\widetilde{T}_tf(x)$是C_2^0上非负有界线性泛函。因为C_2^0在$L_2(\mathrm{w})$上稠，所以$\widetilde{T}_tf(x)$可扩展成$L_2(\mathrm{w})$上非负有界线性泛函$\Phi_{t,x}(f)$。再由Riesz表示定理，存在$\widetilde{P}_{x,t}(y)\in L_2(\mathrm{w})$，$\widetilde{P}_{x,t}(y)\geqslant 0$，$\|\widetilde{P}_{x,t}\|_2\leqslant 1$，使

$$\Phi_{t,x}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\widetilde{P}_{x,t}(y)\mathrm{w}(y)dy$$

令

$$p(t,x,y)\equiv \mathrm{w}(y)\widetilde{p}_{x,t}(y)$$

则有

$$\Phi_{t,x}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)p(t,x,y)dy$$

特别对$f\in C_2^0$，有

$$T_tf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)p(t,x,y)dy$$

即(4.3.12)对$f\in C_2^0$成立。

在$f\in C_2^0$时，$\widetilde{T}_tf(x)=T_tf(x)$对$x$是连续的，由$C_2^0$在$L_2(\mathrm{w})$稠可知对$f\in L_2(\mathrm{w})$而言，$\Phi_{t,x}(f)$对$x$是可测的。这说明$t$固定后，$\widetilde{p}_{t,x}(y)$作为以$x$为变元而取值于$L_2(\mathrm{w})$中的抽象函数是弱可测的，因而在

*Bochner*意义下强可测[7]。于是可知$\widetilde{p}_{t,x}(y)$对$(x,y)p.p$可测，因此$p(t,x,y)$对(x,y)二元$p.p$可测．类似地还可证$p(t,x,y)$对(t,y)二元$p.p$可测．

令

$$\mathbf{P}_1(t,x,\Gamma)\equiv\int_\Gamma p(t,x,y)dy$$

对$f\in C_2^0$有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)P_{t,x}(dy)=T_tf(x)=\widetilde{T}_tf=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)P_1(t,x,dy)$$

（在S_2^*情况下，$P_{t,x}(\Gamma)$对应地应改为$P_0(t,x,\Gamma)$，故可统一地考虑）

对f为区间$[\alpha,\beta]$的特征函数，取$f_n\in C_2^0$，$f_n\uparrow f$，由*Levi*定理得

$$P_{t,x}([\alpha,\beta])=P_1(t,x,[\alpha,\beta])$$

由测度扩张唯一性，可知对$(-\infty,\infty)$上一切可测集Γ均有

$$P_{t,x}(\Gamma)=P_1(t,x,\Gamma)=\int_\Gamma p(t,x,y)dy$$

一般地

$$P_{t,x}(\Gamma\cup\{\pm\infty\})=P_{t,x}(\{\pm\infty\})+\int_\Gamma p(t,x,y)dy$$

由此

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x,y)dy\leqslant P(t,x,[-\infty,\infty])\leqslant 1$$

这说明x,t固定后，$\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x,y)dy\leqslant 1$

往证(4.3.12)对$f\in L_2(w)\cap\mathscr{E}$成立。

对$f\in L_2(w)\cap\mathscr{E}(\supset C_2^0)$，存在$f_n\in C_2^0$，$\|f_n-f\|\to 0$．于是，$\widetilde{T}_tf_n\xrightarrow{L_2(w)}\widetilde{T}_tf$。

另一方面

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(y)p(t,x,y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(t,x,y)\,dy\right|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(y)-f(y)|\ \widetilde{p}_{t,x}(y)\mathrm{w}(y)dy$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(y)-f(y)|^2\mathrm{w}(y)dy\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{p}_{t,x}(y)^2\mathrm{w}(y)dy$$

$$\leqslant \| f_n - f \|^2 \to 0.$$

但f_n成立(4.3.12)，所以对一切 x ，$\widetilde{T}_t f_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(t,x,y)dy$。

由于$\widetilde{T}_t f = T_t f$ 是连续函数，故必须有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(t,x,y)dy = T_t f$$

故(4.3.12)得证。

最后来证明$p(t,x,y)$满足Колмогоров方程

由于在$\mathcal{E}\cap L_2(\mathrm{w})$上$\widetilde{T}_t$与$T_t$一致，因此对于$f\in\mathcal{E}\cap L_2(\mathrm{w})$，$\widetilde{T}_t f$仍在$\mathcal{E}\cap L_2(\mathrm{w})$中，而且$\widetilde{T}_s\widetilde{T}_t f$仍连续，所以由$\widetilde{T}_t$的半群性及$\widetilde{T}_{t+s}f$的连续性可知，有

$$(\widetilde{T}_{t+s}f)(x) = \widetilde{T}_s(\widetilde{T}_t f)(x) \qquad (-\infty < x < \infty, f\in L_2(\mathrm{w})\cap\mathcal{E})$$

由(4.3.12)及*Fubini*定理得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(t+s,x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{\infty}^{\infty} p(s,z,y)p(t,x,z)\,dzdy$$

用典型的逼近法(C_2^0函数列逼近区间特征函数)及测度扩张唯一性可知对一切可测集Γ有

$$\int_{\Gamma} p(t+s,x,y)dy = \int_{\Gamma}\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(s,z,y)p(t,x,z)dz\right)dy$$

因此，其*Radon-Nikodym*微商也应p.p相等，即

$$p(t+s,x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,z,y)p(t,x,z)dz \quad (\text{对}y\ p.p\text{成立})$$

此即转移密度的Колмогоров方程。

§4.4. 最小过程及其保守条件

因为对一个转移函数$P(t,x,\Gamma)$[6]来说，只要配上一个初始分布就能构造马氏过程，所以在本章中把转移函数叫做马氏过程。

若$P(t,x,(-\infty,\infty))\equiv1$，则称该过程为保守的。保守的马氏过程不论在什么初分布下，轨道以概率为1不中断(灭绝时刻为$+\infty$)。

定义4.4.1. 如果$p_0(t,x,y)$是定理4.3.1中S_λ^0作出的转移密度，则称

$$P_0(t,x,\Gamma)\equiv\int_\Gamma p_0(t,x,y)dy$$

为最小过程。

定理4.4.1. 任何初分布出发的最小过程（在等价意义下）是强马氏过程，并且在灭绝时刻以前是连续轨道的，即是扩散过程[6]。

证明 为简单起见，设$\pm\infty$为同类边界。

在流入边界情况，由定理4.2.3的边界条件可知$C_2^*\subset S_\lambda^0C^*$，再由定理4.2.2得到$\overline{S_\lambda^0C^*}=C^*$，所以此时最小过程为$[-\infty,\infty]$上*Feller*过程。

在其它边界情况由定理4.2.2及引理4.2.6可知$\overline{S_\lambda^0\hat{C}}=\hat{C}$，故此时最小过程为$\hat{C}$过程[6]。

(在$-\infty$流入边界而$+\infty$非流入边界时，则类似地有$\overline{S_\lambda^0C_{-\infty}}=C_{-\infty}$，其处理方法与$\hat{C}$过程及*Feller*过程无本质差异)。

在所有的情况，最小过程都可以统一考虑为$\hat{C}$过程(例如*Feller*过程可以在$[-\infty,\infty]$外加一孤立“无穷远”点，而把$\pm\infty$均看成正

常点，$C_{-\infty}$情况把$-\infty$看成正常点，而把$+\infty$看为“无穷远”点）。

故由[6]中定理3.7可知最小过程$P_0(t,x,\Gamma)$满足 дынкин 的条件$L(\Gamma)$.若令

$$\Omega_0 = \Omega - c(x)$$

那么Ω_0导出的最小过程（记为$P_0^0(t,x,\Gamma)$）由[6]中定理 3，9′ 可知，它满足 дынкин 的条件 $N(\Gamma)$，用[6]中定理5.11证明的 6° 的后半段可知

$$P_0^0(t,x,\Gamma) \geqslant P_0(t,x,\Gamma)$$

因此$P_0(t,x,\Gamma)$也满足条件$N(\Gamma)$，再利用[6]中定理3.5就得到最小过程在灭绝时间以前是轨道连续的。

在流入边界情形，我们曾把$\pm\infty$看作正常点，但是由[4]中定理3（那里假定了 $c(x)\equiv 0$，但该定理的叙证可一字不改地用于 $c(x)\neq 0$ 的情况），可知边界点$\pm\infty$不能在有限时间内达到，所以最小过程的轨道在通常意义下(即$\pm\infty$不作为正常点)也是以概率为 1 地在灭绝时间以前连续的。

在本定理证明过程中，曾把自然边界情况也认为最小过程是由$\mathscr{E}=\hat{C}$ 上的半群构造出T_t^0及 $P(t,x,\Gamma)$ 然后改造而得的$P_0(t,x,\Gamma)=\int_\Gamma p_0(t,x,y)dy$(见定理4.3.1)。这在$c(x)\neq 0$情况是符合我们关于$\mathscr{E}$的定义的。而在$c(x)\equiv 0$情况，要这样做也是能够得到一个转移密度的，但是为了研究转移密度保守性的需要，我们在§3中取$\mathscr{E}=\overline{S_t^0 C^*}$（当 $c(x)\equiv 0$时）在$\pm\infty$为正则或流出边界时$\overline{S_t^0 C^*}=\hat{C}$ 无不一致，在自然边界时$\overline{S_t^0 C^*}$与$\hat{C}$并不见得一样，我们要指出：在 $c(x)\equiv 0$，且边界点是自然边界时，不论用$\mathscr{E}=\hat{C}$还是用$\mathscr{E}=\overline{S_t^0 C^*}$出发经过§4.3中种种手续最后得到的转移密度(最小过程)总是一样的，这是由下述结论更强的唯一性定理所保证的。

引理4.4.1. 如果$\pm\infty$都是流入或自然边界，那末满足下述条件(L)的马氏过程$P(t,x,\Gamma)$是唯一的，因而必是最小过程，条件(L)为：

(L)：对$P(t,x,\Gamma)$的半群T_t的生成元A有

$$C_2^0\subset\mathcal{D}(A)\subset C_2,\quad A=\Omega\Big/_{\mathcal{D}(A)}.$$

证明

设T_t的强予解式为R_λ，对$f\in C_2^0\subset\mathcal{D}(A)$，显然$R_\lambda f\in\mathcal{D}(A)$，且$(\lambda-\Omega)R_\lambda f=f$。因此$S_\lambda^0 f-R_\lambda f$是$(\lambda-\Omega)u=0$的有界解。但$\pm\infty$为流入或自然边界，故

$$S_\lambda^0 f=R_\lambda f$$

由(4.3.1)可知

$$T_t^0 f=T_t f$$

即

$$\int f(y)P(t,x,dy)=\int f(y)P_0(t,x,dy)$$

用典型的逼近可得

$$P(t,x,\Gamma)=P_0(t,x,\Gamma).$$

定理4.4.2. 最小过程保守与下述说法之一等价：

1° $\lambda S_\lambda^0 1\equiv 1$.

2° $c(x)\equiv 0$，且对一切λ均有($u_i(x)$依赖λ)：

$$\lim_{x\to+\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_1'(x)=\lim_{x\to-\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_2'(x)=0.$$

3° $c(x)\equiv 0$，存在一个λ使对应的$u_1(x),u_2(x)$均无界。

4° $c(x)\equiv 0$，且

$$\int_{-\infty}^0\frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\left(\int_x^0\mathrm{w}(s)ds\right)dx=+\infty,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\left(\int_0^x \mathrm{w}(s)ds\right)dx=+\infty.$$

证明

1° 等价于2°的证明：由(4.2.4)(定理4.2.2证明中)知$\lambda S_\lambda^0 1=1$之充要条件为：

$$u_1(x)\left[-\lim_{x\to-\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_2'(x)+\int_{-\infty}^x c(s)u_2(s)\mathrm{w}(s)ds\right]+$$

$$u_2(x)\left[\lim_{x\to+\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_1'(x)+\int_x^{+\infty}c(s)u_1(s)\mathrm{w}(s)ds\right]=0 \quad (4.4.1)$$

由于u_i恒正而方括号内均为非正，所以(4.4.1)等价于：

$$\lim_{x\to-\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_2'(x)=\lim_{x\to+\infty}a(x)\mathrm{w}(x)u_1'(x)=0$$

$$\int_{-\infty}^x c(s)u_1(s)\mathrm{w}(s)ds=\int_x^{+\infty}c(s)u_2(s)\mathrm{w}(s)ds=0$$

由$c(s)$之连续性易见此条件等价于2°。

由最小过程保守性推出1°之证明：对

$\int_{-\infty}^{\infty}p_0(t,x,y)dy=1$两边取*Laplace*变换，得

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda t}p_0(t,x,y)dydt=\frac{1}{\lambda} \quad (4.4.2)$$

取$f_n\in C_2^0$，使$f_n\uparrow 1$，由Levi定理及(4.4.2)可得

$$\lambda\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda t}p_0(t,x,y)f_n(y)dydt\xrightarrow{n\to\infty}1.$$

但左式为(由$f_n\in\mathscr{D}(A)$及(4.2.1)

$$\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}T_t^0 f_n(x)dt=\lambda R_\lambda^0 f_n(x)=\lambda S_\lambda^0 f_n(x)$$

$$=\frac{\lambda}{a(0)\Delta(0)}\left\{u_1(x)\int_{-\infty}^x u_2(s)\mathrm{w}(s)f_n(s)ds+\right.$$

$$u_2(x)\int_x^{+\infty} u_1(s)\mathrm{w}(s)f_n(s)\ ds\Big] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda}{a(0)\Delta(0)}\Big[u_1(x)\int_{-\infty}^x u_2(s)$$

$$\mathrm{w}(s)ds + u_2(x)\int_x^{\infty} u_1(s)\mathrm{w}(s)\,ds\Big] = \lambda S_\lambda^0 1.$$

因此 $\lambda S_\lambda^0 1 = 1$。

由1°推出最小过程保守性的证明：因为1°成立时已证2°成立，即$c(x)\equiv 0$。此时$\mathcal{E}=\overline{S_\lambda^0 C^*}$，所以

$$1 = S_\lambda^0(\lambda 1) = S_\lambda^0(\lambda^2 S_\lambda^0 1) \in S_\lambda^0(S_\lambda^0 C^*) \subset S_\lambda^0(\overline{S_\lambda^0 C^*})$$

这说明 $1\in \mathscr{D}(A)$，$\lambda R_\lambda^0 1 = 1$

因此$T_t^0 1$强连续，而且$T_t^0 1 = 1$。

取$f_n \in C_2^0, f_n \geqslant 0$，且$f_n \uparrow 1$，由$R_\lambda^0 = S_\lambda^0$的表达式得

$$1 = \lambda R_\lambda^0 1 = \lim_{n\to\infty} \lambda R_\lambda^0 f_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} T_t^0 f_n(x)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\widetilde{T}_t f_n(x)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^\infty f_n(y)P_0(t,x,dy)dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^\infty p_0(t,x,y)dy\,dt,$$

所以

$$\int_{-\infty}^\infty p_0(t,x,y)dy = 1.$$

令

$$E = \{(t,x):\ \int_{-\infty}^\infty p_0(t,x,y)dy < 1\}$$

则上式说明E的x截口集T_x为*Lebesgue*零测集，$m(T_x)=0$，其中

$$T_x = \{t:\ (t,x)\in E\}$$

$m(T_x)$表*Lebesgue*测度

令

$$E_t = \{x;\ (t,x) \in E\}$$

由*Fubini*定理(用于$(m\times m)(E)$)得

$$m(E_t) = 0 \qquad\qquad p.p.dt$$

设

$$T_0 = \{t;\ m(E_t) \neq 0\}$$

则$m(T_0) = 0$。

由Колмогоров方程

$$\int p_0(\tau,x,y)dy = \int p_0(\tau - s,x,z)\left(\int p_0(s,z,y)dy\right)dz$$

所以对任$\tau>0$，只要证明：

«存在分解$\tau = s + (\tau - s)$，使$s, \tau - s > 0$，且

$$m\{z;\ s \in T_z\} = 0\ (即 m(E_s) = 0)$$

$$\tau - s \in T_x»$$

那末就立即有

$$\int p_0(\tau,x,y)dy = 1$$

但是

$$\{s;\ 0 < s < \tau, s \in T_0\} \cup \{s;\ 0 < s < \tau,\ \tau - s \in T_x\}$$

是零测集，因此存在一个$s(0<s<\tau)$ 属于它的余集合，对这个 s 有$\tau - s \overline{\in} T_x, s \overline{\in} T_0$，即« »中断言成立。

因此

$$\int p(\tau,x,y)dy = 1。$$

1°推出3°的证明：在1°下2°必成立，因此$c(x) \equiv 0$，此时$u_1(x)$，$u_2(x)$必无界，因若不然，设$u_2(x)$为有界，那末由定理4.2.2可知$(S_1^c 1)(x) \to 0 (x \to +\infty)$，此与1°矛盾。

3°推出2°的证明，用引理4.2.4即得。

4°与3°的等价性证明：4°中后一个条件即是定理4.1.3与定理4.1.4中的条件(在$\pm\infty$处的σ_2均为$+\infty$)。

§4.5. 局部边界条件下Ω导出的马氏过程可逆的必要条件

定义4.5.1. 设S_λ为在C^*上Ω的*Feller*预解式(即S_λ为C^*到C的有界线性正算子，满足$\lambda S_\lambda 1\leqslant 1$及预解关系$S_\lambda-S_\mu=(\mu-\lambda)S_\lambda S_\mu$和方程$(\lambda-\Omega)S_\lambda f=f$)。

相空间在$[-\infty, +\infty]$上的马氏过程$P(t,x,\Gamma)$称为由预解式S_λ导出的过程，如果S_λ对C^*的最大不变子空间$\mathscr{E}_0$有：$P(t,x,\Gamma)$的半群T_t以$\mathscr{E}=\overline{S_\lambda\mathscr{E}_0}$为不变子空间，且$T_t$在其上强连续，同时$T_t$在$\mathscr{E}$上的预解式$R_\lambda=S_\lambda|\mathscr{E}$。

相空间在$[-\infty,+\infty]$上的马氏过程$P(t,x,\Gamma)$称为是由Ω导出的过程，如果存在Ω的一个预解式S_λ，使$P(t,x,\Gamma)$是S_λ导出的过程。

引理4.5.1. 当$f\in C^*$时，预解式S_λ一定有

$$S_\lambda f=S_\lambda^0 f+u_1(x)\int_{\overline{R}}f(y)v_1(dy)+u_2(x)\int_{\overline{R}}f(y)v_2(dy) \quad (4.5.1)$$

其中S_λ^0为最小解所定义的预解式，$\overline{R}=[-\infty,\infty]$，$v_i(\Gamma)$为$\overline{R}$上正有限测度($v_1(\Gamma)\equiv 0$，当$-\infty$为流入或自然边界；$v_2(\Gamma)\equiv 0$，当$+\infty$为流入或自然边界)。

证明 $S_\lambda f-S_\lambda^0 f$是$(\lambda-\Omega)u=0$之解，所以能表成$u_1,u_2$的线性组合，由$u_1,u_2$分别为严递降与严递增正解，故这个线性组合的两个系数分别是C^*上的有界线性泛函，用*Riesz*表示定理即得(4.5.1)。

由引理4.5.1及定理4.2.2可知，在$c(x)\neq 0$且$\pm\infty$中至少有一

个为自然边界时定义4.5.1中的$\mathscr{E} \supset \hat{C}$，而在其它所有情况下都有$\mathscr{E} = \overline{S_\lambda C^*}$。

易见最小过程就是S^0_λ导出的过程。

定义4.5.2. 强平稳过程$x(t)(0 \leqslant t < \infty)$称为可逆的，如果对任意 $0 \leqslant t_0 < t_1, \cdots < t_n$，只要

$$t_k - t_{k-1} = t_{n-k+1} - t_{n-k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

就对一切$x_0, x_1, \cdots, x_n$有

$$P\{x(t_0) < x_0, \cdots, x(t_n) < x_n\} = P\{x(t_0) < x_n, \cdots, x(t_n) < x_0\}.$$

定义4.5.3. 以$[-\infty, \infty]$为相空间的马氏过程$P(t, x, \Gamma)$称为可逆的，如果存在$(-\infty, \infty)$上初分布$\mu(dx)$，使转移函数$P(t, x, \Gamma)$在此初分布下生成的过程为平稳可逆过程（因而对任意 t，$P(x(t) = \infty) = 0$）。$\mu(\Gamma)$称为可逆初分布。

引理4.5.2. 相空间为$[-\infty, \infty]$的马氏过程$p(t, x, \Gamma)$为可逆的必要条件为存在$(-\infty, \infty)$上初分布$\mu(dx)$，使对任意$(-\infty, \infty)$上可测集Θ，Γ有

$$\int_\Theta P(t, x, \Gamma)\, \mu(dx) = \int_\Gamma P(t, x, \Theta)\, \mu(dx) \qquad (4.5.2)$$

在$P(t, x, \Gamma)$保守时（即$P(t, x, (-\infty, \infty)) = 1$，当$-\infty < x < +\infty$）该条件也充分。

证明 由可逆性定义得

$$P(x(0) \in \Theta,\ x(t) \in \Gamma) = P(x(0) \in \Gamma,\ x(t) \in \Theta)$$

$(x(t)$为由$P(t, x, \Gamma)$和$\mu(\Gamma)$所定义的可逆过程，显然

$$P(x(t) \in (-\infty, \infty)) = P(x(0) \in (-\infty, \infty)) = \mu((-\infty, \infty) = 1).$$

此即必要性条件.

当$P(t, x, \Gamma)$保守时，此时以$\mu(\Gamma)$为初分布的马氏过程$P(t, x, \Gamma)$不中断，于是对 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，且 $t_k - t_{k-1} = t_{n-k+1} - t_{n-k}$

$(k=1,\cdots,n)$ 及任何 $x_1,\cdots,x_n$，连续用（4.5.2）得：

$$P\{x(t_0)<x_0,\ \cdots,\ x(t_n)<x_n\}$$

$$=\int\cdots\int_{u_0<x_0,\cdots,u_n<x_n}\mu(du_0)\ P(t_1-t_0,u_0,du_1)$$
$$P(t_2-t_1,u_1,du_2)\cdots P(t_n-t_{n-1},u_{n-1},du_n)$$

$$=\int\cdots\int_{u_0<x_0,\cdots,u_n<x_n}\mu(du_1)\ P(t_1-t_0,u_1,du_0)$$
$$P(t_2-t_1,u_1,du_2)\cdots P(t_n-t_{n-1},u_{n-1},du_n)$$

$$=\int\cdots\int_{u_0<x_0,\cdots,u_n<x_n}\mu(du_2)\ P(t_1-t_0,u_1,du_0)$$
$$P(t_2-t_1,u_2,du_1)\cdots P(t_n-t_{n-1},u_{n-1},du_n)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\int\cdots\int_{u_0<x_0,\cdots,u_n<x_n}\mu(du_n)\ P(t_1-t_0,u_1,du_0)$$
$$P(t_2-t_1,u_2,du_1)\cdots P(t_n-t_{n-1},u_n,du_{n-1})$$

$$=\int\cdots\int_{u_0<x_0,\cdots,u_n<x_n}\mu(du_n)\ P(t_n-t_{n-1},u_1,du_0)$$
$$P(t_{n-1}-t_{n-2},u_2,du_1)\cdots P(t_1-t_0,u_n,du_{n-1})$$

$$=p\{x(t_0)<x_n,\cdots,x(t_n)<x_0\}$$

定义4.5.4. 由 Ω 导出的马氏过程 $P(t,x,\Gamma)$ 称为是满足局部边界条件的，如果 C_2^0 包含于 $P(t,x,\Gamma)$ 生成的 $\mathcal{E}$ 半群的生成元 A 的定义域之中：

$$C_2^0\subset\mathcal{D}(A).$$

显然最小过程是满足局部边界条件的.

定义4.5.5. Ω 的预解式 S_λ 称满足局部边界条件，如果它导出

的过程满足局部边界条件。也即$C_2^0 \subset S_\lambda \mathcal{E}$。

定理4.5.1. Ω导出的满足局部边界条件的马氏过程$P(t,x,\Gamma)$为保守的充要条件是其对应的预解式S_λ满足：

$$\lambda S_\lambda 1 = 1,$$

因而此时必有 $c(x) \equiv 0$。

证明 必要性：

由保守性，取$f_n \in C_2^0$，$f_n \uparrow 1$，由$Levi$定理得

$$\lambda \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda t} P(t,x,dy)\ f_n(y) dt \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad (4.5.3)$$

由假定满足局部边界条件，故$f_n \in \mathscr{D}(A)$，所以上式左边为

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}(T_t f_n)(x) dt = \lambda R_\lambda f_n(x) = \lambda S_\lambda f_n(x)$$

由引理4.5.1及$Levi$定理及上述等式，我们有

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \lambda S_\lambda f_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\lambda S_\lambda^0 f_n(x) + \lambda u_1(x) \int_{\bar{R}} f_n(y) v_1(dy) \\
&\qquad + \lambda u_2(x) \int_{\bar{R}} f_n(y) v_2(dy)\Big) \\
&= \lambda S_\lambda^0 1 + \lambda u_1(x) \int_{-\infty}^\infty v_1(dy) + \lambda u_2(x) \int_{-\infty}^\infty v_2(dy). \\
&\leqslant \lambda S_\lambda^0 1 + \lambda u_1(x) \int_{\bar{R}} v_1(dy) + \lambda u_2(x) \int_{\bar{R}} v_2(dy) = \lambda S_\lambda 1.
\end{aligned}$$

但另一方面显然有$\lambda S_\lambda 1 \leqslant 1$，因此

$$\lambda S_\lambda 1 = \lambda S_\lambda^0 1 + \lambda u_1(x) v_1(\bar{R}) + \lambda u_2(x)\ v_2(\bar{R}) = 1$$

得证必要性，下面证明由$\lambda S_\lambda 1 = 1$可得$c(x) \equiv 0$：由上式及$\lambda S_\lambda^0 1$的表达式(4.2.4)得

$$1 = \lambda S_\lambda 1 = 1 + u_1(x)\Big[(-awu_2')(-\infty)$$

$$+\int_{-\infty}^{x} c(s)u_2(s)w(s)\,ds + \lambda v_1(\overline{R})\Big]$$

$$+u_2(x)\Big[(awu_1')(+\infty) + \int_x^{+\infty} c(s)u_1(s)w(s)ds + \lambda v_2(\overline{R})\Big]$$

把右边方括号内函数分别记成$\alpha_1(x)$，$\alpha_2(x)$后，即得

$$u_1(x)\alpha_1(x) + u_2(x)\alpha_2(x) = 0. \qquad (4.5.4)$$

微商(4.5.4)式，消去同类项后得（注意$\alpha_i(x)$的定义）

$$u_1'(x)\alpha_1(x) + u_2'(x)\alpha_2(x) = 0. \qquad (4.5.5)$$

由(4.5.5)，(4.5.6)及 $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0$，立即可得

$$\alpha_1(x) \equiv 0,\ \alpha_2(x) \equiv 0.$$

对$\alpha_1(x)$，$\alpha_2(x)$求微商，由$u_i(x)$，$w(x)$恒正，可知

$$c(x) = 0, \qquad p.p$$

但$c(x)$连续，所以$c(x) \equiv 0$。

现在证明充分性：因为上面已证了$c(x) \equiv 0$。所以

$$1 = S_\lambda(\lambda 1) = S_\lambda(\lambda^2 S_\lambda 1) \subset S_\lambda \mathscr{E} = R_\lambda \mathscr{E} = \mathscr{D}(A)$$

(因为$c(x) \equiv 0$时，$\mathscr{E} = \overline{S_\lambda C^*}$)。这说明 $R_\lambda 1$ 有意义且 $R_\lambda 1 = S_\lambda 1$，即 $\lambda R_\lambda 1 = 1$，由(4.3.1)即得$T_t 1 = 1$。因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t,x,dy) = 1(\text{积分区间为}(-\infty,\infty)!)$$

即$P(t,x,\Gamma)$保守。

《注意》 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t,x,dy) = 1 \text{ 对 } x, p.p\,dx$$

则(4.5.3)对x, p.p成立，因而$\lambda S_\lambda 1 = 1$，p.p dx，但 $S_\lambda 1$ 是 x 的连续

函数，所以 $\lambda S_\lambda 1=1$ （一切 x ），因此$P(t,x,\Gamma)$保守。

定理4.5.2. Ω导出的满足局部边界条件的马氏过程$P(t,x,\Gamma)$为可逆的必要条件为$P(t,x,\Gamma)$ 保守且$w(x)\in L(-\infty,\infty)$。而且可逆初分布$\mu(\Gamma)$是唯一的，它必为：

$$\mu(\Gamma)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}w(x)dx\right)^{-1}\int_{\Gamma}w(x)dx \qquad (4.5.6)$$

证明 由定理4.5.1可知此时$c(x)\equiv 0$。

1°首先证明$\int_{-\infty}^{\infty}P(t,x,dy)=1$，对 x，p.p.$\mu(dx)$，且对$f\in C_2^0$，恒有

$$\int(\Omega f)(x)\mu(dx)=0.$$

其证如下：由可逆性得

$$\begin{aligned}\mu(\Theta)&=P(x(t)\in\Theta)\\&=P(x(0)\in R,\ x(t)\in\Theta)\qquad (R=(-\infty,\infty))\\&=P(x(0)\in\Theta,\ x(t)\in R)\\&=\int_{\Theta}\int_{R}P(t,x,dy)\mu(dx)\end{aligned}$$

由Θ的任意性可知

$$\int_R P(t,x,dy)=1 \quad 对x,\text{p.p.}\mu(dx)$$

同时对任意有界可测函数 f 有

$$\int f(y)\mu(dy)=\int f(y)v(dy)$$

其中$v(\Gamma)=\int_{\Gamma}P(t,x,\Gamma)\mu(dx)$ 交换右边积分次序得

$$\begin{aligned}\int f(y)\mu(dy)&=\int\left[\int f(y)P(t,x,dy)\right]\mu(dx)\\&=\int(T_tf)(x)\mu(dx)\end{aligned}$$

对 $f\in\mathscr{D}(A)$ 就有

$$\int(Af)(x)\mu(dx)=0$$

由于$C_2^0\subset\mathscr{D}(A)$，所以对$f\in C_2^0$，有

$$\int(\Omega f)(x)\mu(dx)=0.$$

2°先证明一个辅助引理，设$f\in C^2$(二次连续可微)，支集在$[\zeta,\xi]$内，$f'(\zeta)=f'(\xi)=0$，则对任意$\delta>0$，存在$f_\delta\in C_2^0$ 使

$$f_\delta(x)=\begin{cases}f(x) & \zeta\leqslant x\leqslant\xi\\ 0 & x\bar{\in}[\zeta-\delta,\ \xi+\delta]\end{cases}$$

且存在与$\delta(\delta\leqslant1)$无关的常数 l 使$|f^{(k)}(x)-f_\delta^{(k)}(x)|\leqslant l(k=0,1,2)$，因而对$\delta(\delta\leqslant1)$ 一致地有（在$-\infty<x<\infty$）：

$$|\Omega f_\delta(x)|\leqslant\text{常数},\quad \Omega f_\delta(x)\xrightarrow{(\delta\to0)}\Omega f(x).$$

证明 令

$$f_\delta(x)=\begin{cases}(x-(\zeta-\delta))^3(x-\zeta)^2\dfrac{f''(\zeta)}{2\delta^3} & (\zeta-\delta\leqslant x\leqslant\zeta)\\ (x-(\xi+\delta))^3(x-\xi)^2\dfrac{f''(\xi)}{2\delta^3} & (\xi\leqslant x\leqslant\xi+\delta)\\ f(x) & (\zeta<x<\xi)\\ 0 & x\bar{\in}[\zeta-\delta,\xi+\delta]\end{cases}$$

于是 $f_\delta\in C_2^0$.

在$[\zeta-\delta,\zeta]$及$[\xi,\xi+\delta]$外，由假定$f_\delta(x)\equiv f(x)$，而在$[\zeta-\delta,\zeta]$上有

$$|f_\delta(x)|\leqslant\delta^2|f''(\zeta)|\leqslant|f''(\zeta)|\qquad f_\delta''(\zeta)=f''(\zeta)$$

$$|f_\delta'(x)|\leqslant2\delta|f''(\zeta)|\leqslant2|f''(\zeta)|$$

$$|f_\delta''(x)|\leqslant6|f''(\zeta)|$$

(在$[\xi,\xi+\delta]$有类似的不等式)，而在$[\zeta-\delta,\xi+\delta]$外 $f_\delta(x)=f(x)=0$，所以$f_\delta(x)$，$\Omega f_\delta(x)$有界且对δ一致。

又由$f_\delta(x)$之定义，及 $f_\delta''(\zeta)=f''(\zeta)$，$f_\delta''(\xi)=f''(\xi)$ 和f，f'，f_δ，f_δ'在ζ，ξ均为 0 可知：

$$\Omega f_\delta(x) \longrightarrow \Omega f(x) \qquad \delta\to 0.$$

3° 若$f\in C^2$，支集在$[\zeta,\xi]$内，$f'(\xi)=f'(\zeta)=0$，则

$$\int(\Omega f)(x)\mu(dx)=0.$$

证明 若 f_δ为2°定义，由1°$\int(\Omega_\delta f)(x)\mu(dx)=0$，用有界收敛定理在$\delta\to 0$时积分号下取极限就得

$$\int(\Omega f)(x)\mu(dx)=0.$$

4° 设g为支集在$[\zeta,\xi]$内的任一连续函数，则存在一个满足3°的函数f及常数α_1，α_2使

$$g=\Omega f+\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2$$

其中w_1、w_2是共轭方程$\Omega^* v=0$的基本解。

证明 取$\Omega^* v=0$的基本解w_1，w_2，令

$$B=\begin{pmatrix}\int_\zeta^\xi w_1^2(x)dx & \int_\zeta^\xi w_1(x)w_2(x)dx\\ \int_\zeta^\xi w_1(x)w_2(x)dx & \int_\zeta^\xi w_2(x)^2dx\end{pmatrix}$$

于是B^{-1}存在。再令

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}\int_\zeta^\xi g(x)w_1(x)dx\\ \int_\zeta^\xi g(x)w_2(x)dx\end{pmatrix}$$

于是有

$$\int_\zeta^\xi(g(x)-\alpha_1 w_1(x)-\alpha_2 w(x))w_i(x)dx=0\quad(i=1,2)$$

令 $$f(x)=l_1(x)\int_\zeta^x[g(s)-\alpha_1 w_1(s)-\alpha_2 w_2(s)]w_2(s)ds+$$

$$l_2(x)\int_x^\xi[g(s)-\alpha_1 w_1(x)-\alpha_2 w_2(s)]w_1(s)ds$$

其中 $l_i(x)=\dfrac{w_i(x)}{w(x)}$，由引理4.1.1知 $l_1(x)$，$l_2(x)$是$\Omega u=0$ 的基本解。

易验证$f(x)$满足3°的条件且$\Omega f=g-\alpha_1 w-\alpha_2 w$。

5° $d\mu\ll dx$，且"导数" $\dfrac{d\mu}{dx}$满足$\Omega^* v=0$。

证明 首先注意4°中的f由$f(\xi)=f(\zeta)=0$及引理4.1.1，用分部积分可得

$$\int_\zeta^\xi w_i(x)\Omega f(x)dx=\int_\zeta^\xi l_i(x)\Omega^*(fw)(x)dx$$

$$=\int_\zeta^\xi(\Omega l_i)(x)f(x)w(x)dx=0。$$

所以由4°及3°得

$$\int_\zeta^\xi g(x)\ \mu(dx)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\int_\zeta^\xi w_1(x)\mu(dx)\\ \int_\zeta^\xi w_2(x)\mu(dx)\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2)B\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix},\quad\left(令\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}\int_\zeta^\xi w_1(x)\mu_1(dx)\\ \int_\zeta^\xi w_2(x)\mu_2(dx)\end{pmatrix}\right)$$

而 $$(\alpha_1,\alpha_2)B=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\int_\zeta^\xi w_1^2dx & \int_\zeta^\xi w_1w_2dx\\ \int_\zeta^\xi w_1w_2dx & \int_\zeta^\xi w_2^2dx\end{pmatrix}$$

$$=\left(\int_{\zeta}^{\xi}(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2)w_1 dx,\ \int_{\zeta}^{\xi}(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2)w_2 dx\right)$$

$$=\left(\int_{\zeta}^{\xi} g w_1 dx,\quad \int_{\zeta}^{\xi} g w_2 dx\right)$$

因此 $$\int_{\zeta}^{\xi} g(x)\mu(dx)=\beta_1\int_{\zeta}^{\xi} g(x)w_1(x)dx+\beta_2\int_{\zeta}^{\xi} g(x)w_2(x)dx$$

注意到β_1，β_2是与g无关的，同时上式即

$$\int_{\zeta}^{\xi} g(x)\Big[\mu(dx)-[\beta_1 w_1(x)+\beta_2 w_2(x)]dx\Big]=0$$

由$g(x)$的任意性(只要$g(\xi)=g(\zeta)=0$，$g\in C$) 用典型逼近可知对任意区间$[\alpha,\beta]\subset(\zeta,\xi)$，都有$\mu([\alpha,\beta])=\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\beta_1 w_2(x)+\beta_2 w_2(x)\Big)dx$，用测度扩张的唯一性可知对$(\zeta,\xi)$内的可测集$\Gamma$均有

$$\mu(\Gamma)=\int_{\Gamma}\Big(\beta_1 w_1(x)+\beta_2 w_2(x)\Big)dx$$

即在 (ζ,ξ) 内 $d\mu\ll dx$。由 (ζ,ξ) 之任意性立即得到在$(-\infty,\infty)$ 上 $d\mu\ll dx$，且其 *Radon-Nicodyn* 导数$\frac{d\mu}{dx}$是 $\Omega^* v=0$ 之解。

6° $P(t,x,\Gamma)$ 保守。

证明 记$\frac{d\mu}{dx}$为$v(x)$，那么$\Omega^* v=0$，我们指出$v(x)>0$，因若不然，则存在x_0使$v(x_0)=0$。由于$v(x)\geqslant 0$，所以x_0是$v(x)$的极值点：$v'(x_0)=0$。于是$v(x)$是二阶方程$\Omega^* v=0$的零初值的解，因而必须有$v(x)\equiv 0$，这与$\mu((-\infty,\infty))=1$是矛盾的。

既然$\frac{d\mu}{dx}>0$，那末$d\mu\sim dx$，由1°可知

$$\int_{R} P(t,x,dy)=1\qquad \text{对}x,\ p.p.\ dx$$

于是由定理4.5.1后面的《注意》可知$P(t,x,\Gamma)$ 保守。

7° 求$\frac{d\mu}{dx}$的表达式.

取w_1,w_2分别为$w(x)$，$w(x)\int_0^x \frac{1}{aw}ds$(易验证它们是$\Omega^* v=0$的基本解)。那末存在常数$\gamma_1$，$\gamma_2$使(由5°)

$$\frac{d\mu}{dx}=\gamma_1 w(x)+\gamma_2 w(x)\int_0^x \frac{1}{a(s)w(s)}ds$$

$$=w(x)\ h(x)$$

其中

$$h(x)=\left(\gamma_1+\gamma_2\int_0^x \frac{1}{a(s)w(s)}ds\right).$$

由引理4.5.2有

$$\int_\Theta\int_\Gamma h(x)w(x)\ P(t,x,dy)dx=\int_\Gamma\int_\Theta h(x)w(x)P(t,x,dy)dx$$

用典型的逼近法可得对任意有界可测函数f,g有

$$\int g(x)\int f(y)P(t,x,dy)h(x)w(x)dx$$

$$=\int f(x)\int g(y)P(t,x,dy)h(x)w(x)dx,$$

即

$$\int g(x)(T_t f)(x)h(x)\ w(x)dx$$

$$=\int f(x)(T_t g)(x)h(x)w(x)dx. \tag{4.5.7}$$

特别若$f,g\in\mathscr{D}(A)$，则

$$\int g(x)(Af)(x)h(x)w(x)dx=\int f(x)(Ag)(x)h(x)w(x)dx$$

于是对 f，$g\in C_2^0\subset\mathscr{D}(A)$，上式变为

$$\int g(x)(\Omega f)(x)h(x)w(x)dx=\int f(x)(\Omega g)(x)h(x)w(x)dx$$

但左式用分部积分（及引理4.1.1）后变为

$$\int f(x)\,\mathrm{w}(x)\,\Omega(gh)(x)dx=\int f(x)\mathrm{w}(x)(\Omega g)(x)h(x)dx$$

由$f(\in C_2^0)$之任意性必须有

$$(\Omega g)h=\Omega(gh). \qquad (\text{任意}g\in C_2^0)$$

把上式写成微商形式并消去同类项后得

$$[agh']'+(ag'+bg)h=0, \quad (\text{任意}g\in C_2^0)$$

若取$g\in C_2^0$，支集在$[\zeta,\xi]$且在(ζ,ξ)恒正，那末解此方程，知$h(x)$必有形式

$$h(x)=\alpha_1+\alpha_2\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)g(s)^2}\quad\left(x_0=\frac{\xi+\zeta}{2},\ \zeta<x<\xi\right)$$

取g_1，$g_2\in C_2^0$，支集均在$[\zeta,\xi]$内，且在(ζ,ξ)均恒正且使g_1^2与g_2^2线性无关，那末存在α_1，α_2，β_1，β_2使当$\zeta<x<\xi$时有

$$h(x)=\alpha_1+\alpha_2\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)g_1(s)^2}.$$

及 $$h(x)=\beta_1+\beta_2\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)g_2(s)^2}.$$

所以 $$(\alpha_1-\beta_1)+\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{a(s)\mathrm{w}(s)}\left[\frac{\alpha_2}{g_1(s)^2}-\frac{\beta_2}{g_2(s)^2}\right]=0.$$

取微商得$\dfrac{1}{a(x)\mathrm{w}(x)}\left[\dfrac{\alpha_2}{g_1(x)^2}-\dfrac{\beta_2}{g_2(x)^2}\right]=0$，$(\zeta<x<\xi)$

因此 $$\beta_2g_1^2-\alpha_2g_2^2=0. \qquad (\zeta<x<\xi)$$

这说明了若α_2，β_2不全为0，则g_1^2与g_2^2在(ζ,ξ)相关，因而在$[\zeta,\xi]$相关（g_i在ζ,ξ处为0），导致与g_1，g_2取法的矛盾，于是只能有

$$\alpha_2=\beta_2=0,$$

所以 $h(x)=$常数。 $(\zeta<x<\xi)$

由$[\zeta,\xi]$的任意性可知$h(x)$在$-\infty<x<\infty$为常数，即

$$\frac{d\mu}{dx}=c\mathrm{w}(x).$$

因此 $$1=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(dx)=c\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{w}(x)dx,$$

得$\mathrm{w}\in L(-\infty,\infty)$，且$c=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{w}(x)dx\right)^{-1}$，即

$$\mu(\Gamma)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{w}(x)dx\right)^{-1}\int_{\Gamma}\mathrm{w}(x)dx.$$

引理4.5.3. 若 $\mathrm{w}\in L(-\infty,\infty)$，又$T$为作用在$L_2(\mathrm{w})$内某些元素$f$上的算子，它满足：

(T_1) $\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(T^2)$

(T_2) $(T^nT^lf,\ T^kf)=(T^lf,\ T^nT^kf)$ $f\in\mathscr{D}(T)(k,l,n\geqslant 0)$

(T_3) $f\in\mathscr{D}(T)$，$|f|\leqslant c\ p.p=>|Tf|\leqslant c\ p.p$

则当$f\in\mathscr{D}(T)$且f有界时，恒有 $\|Tf\|_2\leqslant\|f\|_2$.

证明

$$\|Tf\|^2=(Tf,Tf)=(f,\ T^2f)\leqslant\|f\|\ \|T^2f\|_2. \qquad (T_4)$$

对(T_4)求平方，再把T^2当作T(T^2仍满足(T_1)—(T_3))

$$\|Tf\|_2^4\leqslant\|f\|_2^2\|T^2f\|_2^2\leqslant\|f\|_2^2\cdot\|f\|_2\|T^4f\|_2$$
$$=\|f\|_2^3\cdot\|T^4f\|_2.$$

用归纳法可得

$$\|Tf\|_2^{2^n}\leqslant\|f\|_2^{2^n-1}\|T^{2^n}f\|_2$$

即 $$\|Tf\|_2\leqslant\|f\|_2^{1-\frac{1}{2^n}}\|T^{2^n}f\|_2^{\frac{1}{2^n}}. \qquad (T_5)$$

如果$|f|\leqslant c$，那末$|Tf|\leqslant c$，故$|T^{2^n}f|\leqslant c$ $(p.p)$，于是

$$\|T^{2^n}f\|_2^{\frac{1}{2^n}}=\left(\int|T^{2^n}f(x)|^2\mathrm{w}(x)dx\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$\leqslant\left(c^2\int w(x)dx\right)^{\frac{1}{2^{N+1}}}\longrightarrow 1\quad(n\to\infty)$$

在(T_5)中令$n\to\infty$，得到 $\|Tf\|_2\leqslant\|f\|_2$。

定理4.5.3. 若Ω导出的满足局部边界条件的马氏过程$P(t,x,\Gamma)$可逆，则由其半群T_t出发可以作出一个$L_2(w)$上对称收缩强连续半群$\widetilde{T}_t$，使对任意有界可测函数f，恒有

$$(\widetilde{T}_tf)(x)=(T_tf)(x)\qquad p.p.dx\quad 、$$

特别当$f\in\mathcal{E}$时，T_tf可看成$\widetilde{T}_tf$的连续修正。即$\widetilde{T}_tf\,(f\in\mathcal{E})$恒可认为是连续函数（今后总假定它连续）。同时有（$\widetilde{R}_\lambda$为$\widetilde{T}_t$的预解式）

$$\widetilde{T}_t1=1,$$

$$\lambda\widetilde{R}_\lambda 1=1.\qquad(4.5.8)$$

证明 由定理4.5.2证明的7°中(4.5.7)知(令$h\equiv$常数）对任意有界可测函数f,g有

$$\int g(x)\,(T_tf)(x)\,w(x)dx$$

$$=\int f(x)(T_tg)(x)w(x)dx\qquad(4.5.9)$$

对任意$f\in L_2(w)$，取有界可测函数列f_n，$\|f_n-f\|_2\to0$，对f_n-f_m及T_t（由(4.5.9) T_t显然满足引理4.5.3的条件）用引理4.5.3得：

$$\|T_tf_n-T_tf_m\|_2\leqslant\|f_n-f_m\|_2\to0\qquad(n,m\to\infty)$$

于是T_tf_n是$L_2(w)$中Cauchy列。定义

$$\widetilde{T}_tf\equiv(L_2(w))\lim_{n\to\infty}T_tf_n$$

显然$\widetilde{T}_tf$不依赖于f_n的取法。

$\widetilde{T}_t$是有界对称算子：对任意$g\in L_2(w)$，同样取有界可测$g_n\to$

$g(L_2(\mathrm{w}))$，于是 $T_t g_n \xrightarrow{L_2(w)} \widetilde{T}_t g$。由(4.5.9) $(g_n, T_t f_n) = (T_t g_n, f_n)$，令 $n \to \infty$ 即得

$$(g, \ \widetilde{T}_t f) = (\widetilde{T}_t g, \ f)$$

因此 $\widetilde{T}_t$ 是全定对称算子，因而是有界算子[6]。

$\widetilde{T}_t$ 是半群：若 f 有界可测，则 $\widetilde{T}_t f = T_t f$ 仍有界可测，且 $\widetilde{T}_s T_t f = T_{s+t} f$。一般 $f \in L_2(\mathrm{w})$，取 f_n 有界可测，$\| f_n - f \| \to 0$，由 $\widetilde{T}_s$ 有界性可知

$$\widetilde{T}_s \widetilde{T}_t f = \lim_n \widetilde{T}_s (T_t f_n) = \lim_n T_s (T_t f_n)$$

$$= \lim_n T_{s+t} f_n = \widetilde{T}_{s+t} f.$$

$\widetilde{T}_t$ 是收缩的：若 f 有界可测则由引理4.5.3 $\| \widetilde{T}_t f \|_2 \leqslant \| f \|_2$。由有界可测函数全体在 $L_2(\mathrm{w})$ 稠，所以 $\| \widetilde{T}_t f \|_2 \leqslant \| f \|_2$ 对一切 $f \in L_2(\mathrm{w})$ 成立。

$\widetilde{T}_t$ 是强连续的：对 $f \in L_2(\mathrm{w})$ 存在 $f_n \in C_2^0$ 使，$\| f_n - f \|_2 \to 0$。于是

$$\| \widetilde{T}_t f - f \|_2 = \| \widetilde{T}_t f - \widetilde{T}_t f_n \|_2 + \| \widetilde{T}_t f_n - f_n \|_2 + \| f_n - f \|_2$$

$$\leqslant \| f - f_n \|_2 + \| T_t f_n - f_n \|_2 + \| f_n - f \|_2$$

先取 n 充分大，再取 t 充分小就得

$$\| \widetilde{T}_t f - f \|_2 \to 0. \qquad (t \to 0)$$

(4.5.8)的证明：在本定理条件下由定理4.5.1 知 $\lambda S_\lambda 1 = 1$，由(4.3.1) 得 $T_t 1 = 1$，再由 $\widetilde{T}_t$ 的定义得 $\widetilde{T}_t 1 = 1$ 及 $\lambda \widetilde{R}_\lambda 1 = 1$。

§4.6. 在局部边界条件下Ω导出的过程可逆的充要条件及全部可逆过程

本节给出在局部边界条件下Ω导出的过程为可逆的充要条件，并找出在该条件下的全部可逆过程（即全部能导出可逆过程的予解式 S_λ——或边值条件）。由定理 4.5.1 知，只须讨论 $c(x)\equiv 0$ 情况（$c(x)\neq 0$时这种可逆过程不存在），所以在本节恒设

$$c(x)\equiv 0.$$

定理4.6.1. Ω导出的满足局部边界条件的保守过程$P(t,x,\Gamma)$可逆的充要条件为：$\mathrm{w}(x)\in L(-\infty,\ \infty)$ 且对任意 $f,g\in C^*$有

$$(T_t f,\ g)=(f,\ T_t g)\qquad (L_2(\mathrm{w})\text{内积}) \qquad (4.6.1)$$

证明 必要性：由定理 4.5.2及定理 4.5.3 即得。

充分性：在(4.6.1)中取 $f=1$，$g=\chi_\Theta$，由保守性 $T_t1=1$得

$$\int_\Theta \mathrm{w}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_\Theta P(t,x,dy)\mathrm{w}(x)dx=\int P(t,x,\Theta)\mathrm{w}(x)dx.$$

于是

$$\mu(\Theta)=\int P(t,x,\Theta)\mu(dx).$$

其中 $\mu(\Theta)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{w}(x)dx\right)^{-1}\int_\Theta \mathrm{w}(x)dx.$

所以$\mu(\Theta)$ 是平稳分布。

再在（4.6.1）中取 f，g 分别为Γ，Θ的特征函数，得到

$$\int_\Theta P(t,x,\Gamma)\mathrm{w}(x)dx=\int_\Gamma P(t,x,\ \Theta)\mathrm{w}(x)dx$$

故 $$\int_\Theta P(t,x,\Gamma)\mu(dx)=\int_\Gamma P(t,x,\Theta)\mu(dx)$$

由引理 4.5.2立得$P(t,x,\Gamma)$ 可逆。

推论 在定理条件成立下，在$\mathcal{E}(=S_\lambda\mathcal{E}_0$，见定义4.5.1)上有

$$(R_\lambda f,\ g)=(f,\ R_\lambda g) \qquad (f,\ g\in\mathcal{E}) \qquad (4.6.2)$$

(R_λ为T_t的强予解式，(4.6.2)也即 $(S_\lambda f,g)=(f,S_\lambda g)$)。同时 T_t可扩张为 $L_2(w)$ 上强连收缩对称半群$\widetilde{T}_t$，其予解式$\widetilde{R}_\lambda$ 有

$$\widetilde{R}_\lambda f=R_\lambda f. \qquad (f\in\mathcal{E})$$

证 这是定理 4,6,1 与定理 4,5,3 的推论。

定理4.6.2. 最小过程 $P_0(t,x,\Gamma)$ 可逆的充要条件为：

$P_0(t,x,\Gamma)$ 保守且 $w(x)\in L(-\infty,\ \infty)$

也即（用Ω的系数表示）：

$$c(x)\equiv 0,\ w(x)\in L(-\infty,\ \infty),$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{a(x)w(x)}\left(\int_x^0 w(s)ds\right)dx=+\infty,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a(x)w(x)}\left(\int_0^x w(s)ds\right)dx=+\infty.$$

证明 必要性：由定理 4.5.1 即得。

充分性：由$P_0(t,x,\Gamma)$ 保守，所以$\pm\infty$必须是流入或自然边界（定理4.4.2），再由定理 4.2.3 中最小解 $S_\lambda^0 f$ 满足的边界条件可知

$$C_2^\#\subset S_\lambda^0 C^\#$$

故$\overline{S_\lambda^0 C^\#}\supset\overline{C_2^\#}=C^\#$，即$\mathcal{E}=C^\#$，但$w(x)\in L(-\infty,\infty)$，所以$L_2(w)\cap\mathcal{E}=C^\#$，由引理4.3.7得对$f\in C^\#$有

$$T_t f=\widetilde{T}_t f$$

由定理 4.6.1 可知 $P_0(t,x,\Gamma)$可逆。

下面我们将找出Ω导出的满足局部边界条件的全部可逆过程。

由定理4.5.1—定理4.5.3及定理 4.6.1 的推论知道这种可逆过程必须满足：$\mu(\Gamma)=c\int_\Gamma w(x)dx$

$c(x)=0$，$w\in L(-\infty,\ \infty)$，$\lambda S_\lambda 1=1$，

$\widetilde{R}_\lambda f=S_\lambda f$，$f\in\mathcal{E}(\widetilde{R}_\lambda$是一个$L_2$(w(对称予解式)

由引理4.4.1知在$\pm\infty$为流入或自然边界时，Ω导出的满足局部边界条件的过程必是最小过程，而由定理 4.6.2 最小过程可逆条件是完全清楚的．故不妨假定$\pm\infty$中至少有一个不是流入或自然边界点．又当$\pm\infty$中有一个为流出边界时，由定理4.1.2可知$w(x)\bar{\in}L(-\infty,\infty)$，所以此时$\Omega$导出的满足局部边界条件的可逆过程必不存在．因此只剩下两种情况需要研究：

(1) $\pm\infty$全为正则边界点．

(2) $\pm\infty$中一个为正则边界，另一个为流入或自然边界．

(一) $\pm\infty$均为正则边界情况：

我们先把$c(x)=0$且$\pm\infty$均为正则边界时，Ω的全部C^*予解式及全部$L_2(w)$予解式([3] § 12及 § 10) 列出如下：

满足$\lambda S_\lambda 1=1$的C^*予解式一般形式：

对$f\in C^*$，$S_\lambda f=u$，u满足$u\in C^*$且

$$(S_1)\qquad\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=0\\ -\sigma_1(awu')(-\infty)+\tau_1(\Omega u)(-\infty)-\int u'(x)\zeta_1(x)dx=0\\ \sigma_2(awu')(+\infty)+\tau_2(\Omega u)(+\infty)+\int u'(x)\zeta_2(x)dx=0\end{cases}$$

σ_i，τ_i，$\zeta_i(x)\geqslant 0$，$\sigma_i+\tau_i+\zeta_i(x)>0$ $(i=1,2)$ $\dfrac{\zeta_i}{aw}\in L(-\infty,\infty)$，$\xi_1\downarrow$，$\xi_2\uparrow$或

$u\in C^*$且满足

$$(S_2)\qquad\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=f\\ u(-\infty)=u(+\infty)\\ -\sigma_1(awu')(-\infty)+\sigma_2(awu')(+\infty)+\tau_1(\Omega ux)(-\infty)+\\ \qquad+\tau_2(\Omega u)(+\infty)+\int\zeta(x)u'(x)dx=0\end{cases}$$

$$\frac{|\zeta|}{aW} \in L(-\infty,\infty),\ \sigma_1+\sigma_2+\tau_1+\tau_2+|\zeta|>0.\ \sigma_i,\tau_i\geqslant 0.$$

对以上某一个$\{S_\lambda: \lambda>0\}$，$S_\lambda C^*$与λ无关.

引理4.6.1. 若$\xi(x)\uparrow$且局部可积，又对任意$v(x)\in C_1^0$(紧支集一次连续可微)，只要$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)dx=0$就可得到$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\xi(x)dx=0$，那末

$$\xi(x)\equiv\text{常数}.$$

证明 令

$$\varphi(x)=\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx} \quad (-\infty<a<b<+\infty)$$

则$\varphi(x)\in C_1^0$，对任意$v\in C_1^0$且支集在$[a,b]$内，令

$$\widetilde{v}(x)=v(x)-\varphi(x)\int_a^b v(t)dt.$$

于是

$$\widetilde{v}\in C_1^0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{v}(x)dx=0.$$

因此由引理条件知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{v}(x)\xi(x)dx=0.$$

但是

$$\text{左边}=\int_a^b v(x)\Big[\xi(x)-\int_a^b\varphi(t)\xi(t)dt\Big]dx.$$

由$\nu(x)$在$[a,b]$的任意性（C_1^0且支集在$[a,b]$内）得

$$\xi(x)=\int_a^b\varphi(t)\xi(t)dt=\text{常数}\qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

但a、b也可任取，所以$\xi(x)\equiv$常数.

推论 当$\pm\infty$均为正则边界时，且予解式S_λ导出的过程满足局部边界条件，那末S_λ对应于(S_1)，(S_2)的表达式中的$\xi_i(x)$，$\xi(x)$均为常数。

证 任取C_2^0函数u，由局部边界条件假定u必须属于$S_\lambda C^*$，因而必须满足(S_1)或(S_2)中的边值。于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\xi_i(x)dx = 0 \qquad (i=1,2)$$

$\left(\text{或}\int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\xi(x)dx = 0\right)$、而$C_2$函数 u 属于C_2^0的充要条件是u'满足引理4.6.1的$v(x)$的条件，因此$\xi_i(x)$═常数。

满足$\lambda\widetilde{R}_\lambda 1 = 1$的$L_2(\mathrm{w})$对称予解式的一般形式为[3]：

对$f\in L_2(\mathrm{w})$，$\widetilde{R}_\lambda f = u$是下述边界问题$(R_1)$或$(R_2)$的$L_2(\mathrm{w})$解：

$$(R_1)\begin{cases}(\lambda-\Omega)u = f \\ \begin{pmatrix}-(a\mathrm{w}u')(-\infty)\\ (a\mathrm{w}u')(+\infty)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\pi_1 & -\pi_{12}\\ -\pi_{12} & \pi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(-\infty)\\ u(+\infty)\end{pmatrix}=0 \\ (\pi_i\geqslant\pi_{12}\geqslant 0,\ i=1,2)\end{cases}$$

$$(R_2)\begin{cases}(\lambda-\Omega)u = f \qquad (a\geqslant 0,\ \pi_i\geqslant 0,\ i=1,2)\\ (a\mathrm{w}u')(-\infty)=(a\mathrm{w}u')(+\infty)\end{cases}$$

$$u(-\infty)=u(+\infty)$$

同样对一种如上定义好的$\{\widetilde{R}_\lambda\ \lambda>0\}$,其值域$\widetilde{R}_\lambda L_2(\mathrm{w})$与$\lambda$无关，可记成$\widetilde{R}$。

既然对可逆过程而言,其$S_\lambda f$，$\widetilde{R}_\lambda f$ 在 $f\in\mathcal{E}$ 相等，因此S_λ必须与$\widetilde{R}_\lambda$有相同的边值形式。在局部边界条件时（即(S_1)，(S_2)中的

$\xi_i(x)$，$\xi(x)$为常数时），S_λ与$\widetilde{R}_\lambda$具相同形式者，这种边值只能为下述两类中之一种：

$$(C_1)\qquad \begin{pmatrix} -(awu')(-\infty) \\ (awu')(+\infty) \end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(-\infty) \\ u(+\infty) \end{pmatrix} = 0,\ (\pi > 0)$$

或

$$(C_2)\qquad (awu')(-\infty) = (awu')(+\infty),$$
$$u(-\infty) = u(+\infty).$$

这恰好是满足$\lambda\widetilde{R}_\lambda 1 = 1$的$\widetilde{R}_\lambda$对应的边值形式$(R_1)$，$(R_2)$。

综上可知$S_\lambda f$具有边值(C_1)与(C_2)是S_λ导出的过程为可逆的必要条件，下面证明它们也充分，即当(S_1)，(S_2)中边值取(C_1)，(C_2)中某一个的形式时，S_λ导出一个可逆过程。

定理4.6.3. 若$w \in L(-\infty, \infty)$，$c(x) \equiv 0$，$\pm\infty$正则，C^*予解式S_λ由如下方法确定：对$f \in C^*$，$S_\lambda f = u$满足

$$\begin{cases} (\lambda - \Omega)u = 0 \\ \begin{pmatrix} -awu'(-\infty) \\ +awu'(+\infty) \end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(-\infty) \\ u(+\infty) \end{pmatrix} = \end{cases}$$
$$= 0\ (\text{某个}\ \pi \geqslant 0) \tag{4.6.3}$$

或
$$\begin{cases} (\lambda - \Omega)u = 0 \\ (awu')(-\infty) = (awu')(+\infty) \\ u(-\infty) = u(+\infty) \end{cases} \tag{4.6.3$'$}$$

那末有

$$\overline{S_\lambda C^*} = C^*,\quad C_2^* \subset S_\lambda C_0$$

S_λ导出的过程有转移密度且可逆，它为相空间$[-\infty, +\infty]$上的*Feller*过程，因而是取值$[-\infty, +\infty]$的*Hunt*过程。

证明 由(4.6.3)及(4.6.3)′的形式可知 $C_2^* \subset S_\lambda C_0$，因此

$C_0\subset S_\lambda C^*$，$\hat{C}\subset\overline{S_\lambda C^*}$。但$C^*$函数能写成$C^\sharp_2$函数与$\hat{C}$函数之和，所以$C^*\subset\overline{S_\lambda C^*}$。

令

$$T_t f=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}(\lambda S_\lambda)^k f,\ (f\in C^*,\ C^*\text{范收敛})$$

则$\mathcal{E}(=\overline{S_\lambda C^*})=C^*$。于是$T_t$为$C^*$强连半群，其生成元

$$A=\Omega\Big|_{S_\lambda C^*},\quad(\mathcal{D}(A)=S_\lambda C^*).$$

由 *Riesz* 表示定理存在测度$P_{t,x}(\Gamma)$，$P_{t,x}([-\infty,\infty])\leqslant 1$ 使对$f\in C^*$有 $\int f(y)T_{t,x}(dy)=T_t f(x)$。由 $\lambda S_\lambda 1=1$ 可知 $T_t 1=1$，即$P_{t,x}((-\infty,\infty))=1$。又由于$w\in L(-\infty,\infty)$，因而$C^*\subset L_2(w)$，而$S_\lambda f$同时也满足 $L_2(w)$中某个对称予解式$\widetilde{R}_\lambda$的边值（(R_1)或(R_2)），即对$f\in C^*$有$S_\lambda f=\widetilde{R}_\lambda f$。而$\lambda S_\lambda$满足引理4.5.3条件，因此

$$\|\lambda\widetilde{R}_\lambda f\|_2\leqslant\|f\|_2.\quad(f\in C^*)$$

但C^*在$L_2(w)$调，由 *Banach-Steinhauβ* 定理[7]可知

$$\|\lambda\widetilde{R}_\lambda\|\leqslant 1.$$

用引理4.2.3.3°同样的理由可知$\|\lambda\widetilde{R}_\lambda f-f\|_2\to 0,(\lambda\to\infty)$，所以令

$$\widetilde{T}_t f=L_2(w)\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}(\lambda\widetilde{R}_\lambda)^k f\quad(f\in L_2(w))$$

就得$L_2(w)$对称强连续收缩半群$\widetilde{T}_t$，设其生成元为$\widetilde{A}$。于是引理4.3.5至引理4.3.7条件均满足，因此（4.3.4）至（4.3.7）均满足。

由于$C^\sharp_2\subset S_\lambda C_0$，仿引理4.3.7证明最后一段可得对$f\in C^\sharp_2$有

$$|\widetilde{T}_t f(x)|^2\leqslant\alpha(\|T_t f\|_2^2+\|\widetilde{A}\,\widetilde{T}_t f\|_2^2)\leqslant k\|f\|_2^2.$$

再由定理4.3.1知道存在一个转移密度 $p(t,x,y)$，使对$f\in C^*$有

$$T_tf(x)=\widetilde{T}_tf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)p(t,x,y)dy. \qquad (4.6.4)$$

马氏过程$P(t,x,\Gamma)=\int_{\Gamma}p(t,x,y)dy$是$S_\lambda$导出的过程，由$\overline{S_\lambda C^*}=C^*$，所以它是$[-\infty,\infty]$为相空间的 *Feller*过程．在(4.6.4) 中取 $f=1$，由$T_t1=1$得$p(t,x,\Gamma)$保守，故由定理4.6.1，过程$P(t,x,\Gamma)$为可逆的。

（二）$\pm\infty$中一个为正则边界另一个为自然边界情况，（不妨设$+\infty$正则，$-\infty$自然）$w(x)\in L(-\infty,\ \infty)$，$c(x)=0$。

由于此时$u_1(x)$无界，由引理 4.5.1 知

$$u=S_\lambda f=S_\lambda^0f+u_2\int_{\bar{R}}fd\mu_2.$$

于是由定理 4.2.2 得

$$u(+\infty)=u_2(+\infty)\int_{\bar{R}}fd\mu_2=u(+\infty)\int(\lambda-\Omega)ud\mu_2.$$

逐句仿[3] § 12中的办法可得(对$\lambda\mu_2$抽•弱收敛子列)

$$u(+\infty)=u_2(+\infty)\int ud\zeta.$$

最后得

$$\rho u(+\infty)+\sigma(a\mathrm{w}u')(+\infty)+\tau(\Omega u)(+\infty)+\int u'(x)\zeta(x)dx=0$$

$\rho+\sigma+\tau+\zeta>0$，ρ，σ，τ，$\zeta(x)\geqslant0$，$\zeta(x)\uparrow$，$\dfrac{\zeta(x)}{a(x)\mathrm{w}(x)}\in L(-\infty,\infty)$ 其中满足$\lambda S_\lambda1=1$者必须$\rho=0$。

另一方面，由于$-\infty$是自然边界及定理4.2.2，

$$u(-\infty)=\frac{f(-\infty)}{\lambda},$$

即

$$(\Omega u)(-\infty)=0.$$

由此可知，满足$\lambda S_\lambda 1=1$的S_λ其$u=S_\lambda f$为下述问题之解：

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=f\ , \quad f\in C^* \\ \sigma(awu')(+\infty)+\tau(\Omega u)(+\infty)+\int u'(x)\zeta(x)dx=0 \\ (\Omega u)(-\infty(=0\end{cases} \quad (4.6.5)$$

而且由引理4.6.1可知其中满足局部边界条件者必须$\zeta(x)=$常数。

类似于[3] § 10，我们可求 $L_2(\mathrm{w})$上对称予解式$\widetilde{T}_\lambda$ 的一般形式：设

$$u=\widetilde{R}_\lambda f=\int G_\lambda(x,y)f(y)\mathrm{w}(y)dy$$

由 $G_\lambda(x,y)=G_\lambda^0(x,y)+c_1u_1(y)+c_2u_2(y)$ 及 $u_1\overline{\in}L_2(\mathrm{w})$（否则$u_1\in L_1(\mathrm{w})$，导致与$-\infty$自然边界矛盾）和$G_\lambda(x,y)$关于$x,y$的对称性，必须有

$$G_\lambda(x,y)=G_\lambda^0(x,y)+\alpha u_2(x)u_2(y)$$

(其中$G_\lambda^0(x,y)$是最小解$S_\lambda^0 f$对应的核函数)。于是

$$u=S_\lambda^0 f+\alpha u_2(x)\int u_2(y)f(y)\mathrm{w}(y)dy$$

$$=S_\lambda^0 f+\alpha u_2(x)\int u_2(y)\mathrm{w}(y)(\lambda-\Omega)u(y)dy.$$

对$-\infty$同样有 $u(-\infty)=\dfrac{f(-\infty)}{\lambda}$（即$(\Omega u)(-\infty)=0$）。对$+\infty$有

$$u(+\infty)=\alpha u_2(+\infty)\int u_2(y)\mathrm{w}(y)(\lambda-\Omega)u(y)dy.$$

用引理4.1.1及分部积分，得

$$u(+\infty)=\alpha u_2(+\infty)[a\mathrm{w}(uu_2'-u_2u')]_{-\infty}^{\infty}$$

$$=-\alpha u_2(+\infty)^2(a\mathrm{w}u')(+\infty)+\beta u(+\infty).$$

其中

$$\beta=\alpha u_2(+\infty)(a\mathrm{w}u_2')(+\infty)$$

即

$$(1-\beta)u(+\infty)+\alpha u_2(+\infty)^2(awu')(+\infty)=0. \qquad (4.6.5)'$$

由(4.6.5)，(4.6.5)′可知在满足$\lambda S_\lambda 1=1$及局部边界条件且又有一个与S_λ有相同边值形式的$L_2(w)$ 对称予解式 R_λ 时，S_λ 必须具形式 $1-\beta=0$，即$u=S_\lambda f(f\in C^*)$满足下条件的唯一解(方程$(\lambda-\Omega)u=f$，在(4.6.6)下显然有唯一解)：

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=f,\\(awu')(+\infty)=0,\\(\Omega u)(-\infty)=0.\end{cases} \qquad (4.6.6)$$

于是有

定理4.6.4. 若 $w\in L(-\infty,\infty)$，$c(x)\equiv 0$，$-\infty$自然，$+\infty$正则，则由(4.6.6) 确定的C^*予解式满足$\overline{S_\lambda C^*}=C^*$，$C_2^*\subset S_\lambda C_0$。$S_\lambda$导出的过程有转移密度且可逆，它为相空间$[-\infty,+\infty]$上的 *Feller* 过程，因而是取值$[-\infty,+\infty]$的 *Hunt* 过程 (但未必是取值$(-\infty,\infty)$的 *Hunt* 过程，虽然$P(x_t=\pm\infty)=0$ 对固定 t 还是成立的)。

证明 与定理 4.6.3 证明完全相同。

(三) $\pm\infty$中一个为正则边界，另一个为流入边界情况：(不妨设$+\infty$正则，$-\infty$流入)

仍讨论 $w(x)\in L(-\infty,\infty)$，$c(x)\equiv 0$ 情况(必要的)。与(二)类似地

$$u=S_\lambda f=S_\lambda^0 f+u_2\int_{\bar R} f d\mu_2$$

$u(+\infty)$与(二)情况完全一样，在$-\infty$由于是流入边界得(因$awu_1'(x)$有界)：

$$(awu')(-\infty)=awu_2'(-\infty)\left(\int u_1 wf dx+\int f d\mu_2\right)=0$$

与(二)完全类似地得到 S_λ($\lambda S_\lambda 1=1$，满足局部边界条件，且有一个在 $L_2(w)$的对称予解式$\widetilde{R}_\lambda$与之有相同边值形式）必须是：$u=S_\lambda f$ ($f\in C^*$) 为下述条件的唯一解：

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=f,\\(awu')(\pm\infty)=0。\end{cases}\qquad(4.6.7)$$

于是有：

定理4.6.5. 若 $w\in L(-\infty,\infty)$，$c(x)\equiv 0$，$-\infty$流入，$+\infty$正则，则由 (4.6.7)确定的C^*予解式满足$\overline{S_\lambda C^*}=C^*$，$C^*_{\frac{1}{2}}\subset S_\lambda C_0$，$S_\lambda$导出的过程有转移密度且可逆，它为相空间$(-\infty,+\infty]$上的 *Feller*过程。

综合(一)，(二)，(三)我们得到：

定理4.6.6. 若Ω的某个 C^* 予解式S_λ满足局部边界条件，则它能导出可逆过程的充要条件为：

$$\begin{cases}w(x)\in L(-\infty,\infty),\quad c(x)\equiv 0,\\ \lambda S_\lambda 1=1,\\ \int f(x)S_\lambda g(x)\cdot w(x)dx=\int g(x)\cdot S_\lambda f(x)\cdot w(x)dx,\end{cases}$$

同时满足。

定理4.6.7. 存在Ω导出的可逆过程的充要条件为：

$w(x)\in L(-\infty,\infty)$，$c(x)\equiv 0$。

在条件成立下的所有可能情况为：

1° 在$\pm\infty$为自然或流入边界时，可逆过程唯一，即是最小过程。

2° 在$\pm\infty$中有一个为自然或流入边界，而另外一个为正则边界时，可逆过程唯一，它不是最小过程，而是由边值条件 (4.6.6) 或(4.6.7) 确定(假定$+\infty$正则)。即在正则或流入边界处对应于纯弹性边值条件，在自然边界处对应于纯附着边值条件[5]。

3° 在$\pm\infty$均为正则边界时，可逆过程有无穷多个，它们全由(4.5.3.)及(4.5.3.)所确定。而最小过程必非可逆。

定理4.6.8. Ω 导出的满足局部边界条件的可逆过程必是取值于 $[-\infty, +\infty]$ 的扩散过程，即：把$+\infty$及$-\infty$分别看成正常的点后，存在转移函数$P(t,x,\Gamma)$的马氏过程x_t，它的几乎所有的轨道都是取值于$[-\infty,+\infty]$的连续函数。

证明 x_t是$[-\infty,\infty]$上*Feller*过程，当然满足 Дынкин 的条件$L(\Gamma)$（[6]p134）。

今证对$[-\infty,+\infty]$的任一个紧子集Γ，[6]p134中条件$N(\Gamma)$也满足。

对任意 $0<\delta_1<\delta_2$，$0<A_2<A_1$，取值于 $[0,1]$ 的 C_2 函数 $p_{x,\delta_1,\delta_2}, p_{-\infty,-A_1,-A_2}, p_{+\infty,A_1,A_2}$满足如下条件：

$$p_{\delta_1,\delta_2}(y)=\begin{cases}1 & x-\delta_1\leqslant y\leqslant x+\delta_1\\ 0 & y\leqslant x-\delta_2\text{或}y\geqslant x+\delta_2\end{cases}$$

$$p_{+\infty,A_1,A_2}(y)=\begin{cases}1 & A_1\leqslant y\\ 0 & y\leqslant A_2\end{cases}$$

$$p_{-\infty,-A_1,-A_2}(y)=\begin{cases}1 & y\leqslant -A_1\\ 0 & y\geqslant -A_2\end{cases}$$

于是它们均属于C_2^*，因此属于$\mathscr{D}(A)$。

且有

$$Ap_{x,\delta_1,\delta_2}(x)=0,\quad Ap_{+\infty,A_1,A_2}(\infty)=0,$$

$$Ap_{-\infty,A_1,-A_2}(-\infty)=0.$$

由 Дынкин[6]定理 3.9′可知$N(\Gamma)$满足。

再由[6]中定理3.5得到具有转移函数 $p(t,x,\Gamma)$ 的连续轨道马氏过程 x_t 的存在性。

注：对最小可逆过程而言，由于$\pm\infty$为流入或自然边界，故$\pm\infty$ $p \cdot p$不能达到[4]，所以此时轨道在通常意义下也是连续的。

参考文献

〔1〕 钱敏平，龚光鲁，钱 敏 二阶微分算子生成的最小过程及其可逆性 北京大学学报，1979，第二期。

〔2〕 龚光鲁，钱敏平 二阶微分算符导出非最小马氏过程的可逆性 数学学报 （将刊出）

〔3〕 W. Feller, Generalized Second Order differential Operator and their Lateral Conditions, Illinois Jour. of Math. 1,1957,459—503

〔4〕 W. Feller. Diffusion Processes in One Dimension. TAMS. 97(1954), 1—31.

〔5〕 Petr Mandl, Analytical Treatment of One-dimensional Markov Processes. Springer. 1968.

〔6〕 Е. Б. Дынкин. Марковские Процессы 1963.

〔7〕 Kôsaku Yosida, Functional Analysis 1965.

〔8〕 R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, Markov Processes and Potential Theory 1968.

第五章　不可逆和细致*平衡与环流分解

钱敏平、钱　敏

（北京大学）

达到平稳的马氏链（过程）并不都是可逆的，例如

$$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

这时它有平稳分布

$$u=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$$

而

$$(u_ip_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可见

$$u_ip_{ij}\neq u_jp_{ji}.\quad (i\neq j)$$

容易看出，时齐马氏链(过程)平稳的充要条件是它的一维分布

* 本章§5.5是按汪培庄文章改写而成的。

$$p_i(t)=P(X(t)=i)$$

不随时间改变。在细致平衡（可逆）的情况下，由于任意两个状态间的概率流动都互相平衡，就保持了处于每个状态的概率不随时间改变。然而，当马氏链（过程）不可逆时，上述的平稳性是怎样保持下来的呢？

仍然以上面的三阶马氏链为例来研究。请注意到，

$$(u_ip_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{6} & \\ & & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

就可以看出

$$u_1p_{12}=u_2p_{23}=u_3p_{32}=\frac{1}{6},$$

$$u_ip_{ij}=0 \quad （其它）.$$

也就是在单位时间内有$\frac{1}{6}$的概率由1迁移到2，又有$\frac{1}{6}$的概率由2迁移到3，还有$\frac{1}{6}$的概率由3迁移到1。由于在1→2→3→1间不息地循环地流动，而保持了各状态分布的平稳。这也就是所谓的环流。

本章讨论不可逆的平稳马氏过程是怎样达到平稳的，结论是：平稳只能由细致平衡、环流平衡或这二者的组合来达到[1]。在后面几节还进一步讨论环流的物理意义及有关问题。

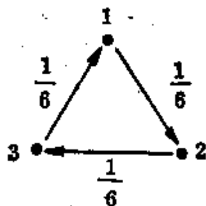


图5.1.1

§5.1. 环流分解定理

例 三能阶的激光器，它的粒子能在1、2、3三个能阶间跃迁，当它稳定的时候，各能阶的粒子数保持一个稳定的分布：$\{u_1, u_2, u_3\}$。设各能阶的跃迁概率可由如下转移矩阵表示：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

那么，这里的定态是怎样实现的呢？由于

$$(u_1, u_2, u_3)\boldsymbol{P}=(u_1, u_2, u_3) \tag{5.1.1}$$

即

$$\begin{cases} u_1 p_{11}+u_2 p_{21}+u_3 p_{31}=u_1 \\ u_1 p_{12}+u_2 p_{22}+u_3 p_{32}=u_2 \\ u_1 p_{13}+u_2 p_{23}+u_3 p_{33}=u_3 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

也就是

$$\begin{cases} u_2 p_{21}+u_3 p_{31}=u_1(p_{12}+p_{13}) \\ u_1 p_{12}+u_3 p_{32}=u_2(p_{21}+p_{23}) \\ u_1 p_{13}+u_2 p_{23}=u_3(p_{31}+p_{32}) \end{cases}$$

所以

$$u_1 p_{12}-u_2 p_{21}=u_2 p_{23}-u_3 p_{32}=u_2 p_{31}-u_1 p_{13} \tag{5.1.3}$$

不妨设

$$u_1 p_{12}-u_2 p_{21}=a$$

可见在这里

$$u_i p_{i\,i+1}=u_{i+1} p_{i+1\,i}+a. \quad (i=1,2,3) \tag{5.1.4}$$

设$\alpha>0$，且

$$u_2 p_{21} = d_1,\ u_3 p_{32} = d_2,\ u_1 p_{13} = d_3 \tag{5.1.5}$$

$$(u_i p_{ij}) = \begin{pmatrix} u_1 p_{11} & d_1 & d_3 \\ d_1 & u_2 p_{22} & d_3 \\ d_3 & d_2 & u_3 p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.6}$$

或者

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \frac{d_1}{u_1} & \frac{d_3}{u_1} \\ \frac{d_1}{u_2} & p_{22} & \frac{d_3}{u_2} \\ \frac{d_3}{u_3} & \frac{d_2}{u_3} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{u_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{u_2} \\ \frac{a}{u_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.7}$$

前一部分若记为$({}_{\alpha}p_{ij})$,后一部分记为 $(p_{ij}^{(1)})$.那么,

$$\begin{cases} u_1\ {}_{\alpha}p_{12} = u_2\ {}_{\alpha}p_{21} = d_1, \\ u_1\ {}_{\alpha}p_{13} = u_3\ {}_{\alpha}p_{31} = d_3, \\ u_2\ {}_{\alpha}p_{23} = u_3\ {}_{\alpha}p_{32} = d_2, \end{cases} \Longrightarrow u_i\ {}_{\alpha}p_{ij} = u_j \cdot {}_{\alpha}p_{ji} \quad (i,j=1,2,3) \tag{5.1.8}$$

而且

$$\begin{cases} u_1 p_{12}^{(1)} = u_2 p_{23}^{(1)} = u_3 p_{31}^{(1)} = a \\ u_i p_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{其它} \end{cases} \tag{5.1.9}$$

这里$({}_{\alpha}p_{ij})$具有细致平衡的特点，称为细致平衡部分，$(p_{ij}^{(1)})$称为环流部分。

上面这种分解可以推广到一般情况。本节就讨论离散时间的马氏链的细致平衡与环流分解。

定义5.1.1. (环流矩阵)矩阵$R=(R_{ij})$称为一个环流矩阵,如果存在i_1，i_2,…，i_M彼此不同，及$a>0$，使

$$R_{ij} = \begin{cases} a & i=i_k, j=i_{k+1} \quad k=1,2,\cdots,M\ (i_{M+1}\text{当作}i_1) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{5.1.10}$$

这时，称α为R的环流量，$i_1, i_2, \cdots, i_M$称为其路径。

引理5.1.1. 设有n阶矩阵$(c_{ij}) \neq 0$，满足

$$c_{ij} \geq 0, \quad c_{ii} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.1.11}$$

$$c_{ij} \cdot c_{ji} = 0 \quad (i \neq j) \tag{5.1.12}$$

$$\sum_i c_{ij} = \sum_i c_{ji} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.1.13}$$

则

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} R_{ij}^{(k)}$$

其中$(R_{ij}^{(k)})(k = 1, 2, \cdots, N)$是环流矩阵，且$R_{ij}^{(k)}$仅在$c_{ij} \neq 0$时才可能非零。

证明 设$c_{j_0 j_1} > 0$，由（5.1.13）知，必有$c_{j_1 j_2} > 0$，又由于（5.1.12）可知$j_2 \neq j_0$。同理，从$c_{j_1 j_2} > 0$出发，又可找到$c_{j_2 j_3} > 0$，且$j_3 \neq j_1$，如此不断地作下去，可得j_0，j_1，…直到首次得j_K使

$$j_k \in \{j_0, j_1, \cdots, j_{k-2}\}$$

设$j_k = j_{k_0}$，则我们令

$$i_1 = j_{k_0}, \quad i_2 = j_{k_0+1}, \quad \cdots, \quad i_M = j_{k-1}, \quad i_{M+1} = j_k = j_{k_0} = i_1$$

那么，i_1，i_2，…，i_M彼此不同，而且

$$c_{i_1 i_2}, \quad c_{i_2 i_3}, \quad \cdots, \quad c_{i_{M-1} i_M}, \quad c_{i_M i_1} > 0$$

现令

$$\alpha_1 = \min_{k=1,2,\cdots,M} c_{i_k i_{k+1}}, \quad \mathcal{L}_1 = \{(i_1, i_2), \cdots, (i_{M-1}, i_M), (i_M, i_1)\} \tag{5.1.14}$$

与

$$R_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_1 & (i, j) \in \mathcal{L}_1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{5.1.15}$$

那么 $R^{(1)} = (R_{ij}^{(1)})$ 是一个环流矩阵，$\alpha_1 > 0$。

再令

$$(c_{ij}^{(1)}) = (c_{ij}) - (R_{ij}^{(1)})$$

则$(c_{ij}^{(1)})$也满足(5.1.11)，(5.1.12)与(5.1.13)，而且$(c_{ij}^{(1)})$中非零元素的个数至少比(c_{ij})的非零元素的个数少1.因而，又可以得到环流矩阵$(R_{ij}^{(2)})$。再令$(c_{ij}^{(2)}) = (c_{ij}) - (R_{ij}^{(2)})$，则$(c_{ij}^{(2)})$又满足(5.1.11)，(5.1.12)与(5.1.13)。……如此重复下去，由于非零元素的个数严格单调减小，所以必定存在一个N，使

$$c_{ij}^{(N)} = 0. \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

也就是说

$$\begin{aligned}(c_{ij}) &= (R_{ij}^{(1)}) + (c_{ij}^{(1)}) = (R_{ij}^{(1)}) + (R_{ij}^{(2)}) + (c_{ij}^{(2)}) \\ &= \cdots = (R_{ij}^{(1)}) + (R_{ij}^{(2)}) + \cdots + (R_{ij}^{(N)}) + c_{ij}^{(N)} \\ &= (R_{ij}^{(1)}) + (R_{ij}^{(2)}) + \cdots + (R_{ij}^{(N)}) \\ &= \sum_k (R_{ij}^{(k)})\end{aligned}$$

引理证毕。

定理5.1.1. （有限状态马氏链的基本分解定理）若马氏链的转移矩阵为$(p_{ij}(t))(t = 1, 2, \cdots)$，它有平稳分布$\{u_i\}$，$u_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则可有分解式：

$$(u_i p_{ij}) = (u_i \cdot {}_a p_{ij}) + \sum_{k=1}^{N} (R_{ij}^{(k)}) \qquad (5.1.16)$$

或

$$p_{ij}(1) = {}_a p_{ij} + \sum_k p_{ij}^{(k)} \qquad (5.1.17)$$

使得：1) $({}_a p_{ij})$是具有性质

$$u_i x_{ij} = u_j x_{ji} \qquad (5.1.18)$$

并保持$0 \leqslant x_{ij} \leqslant p_{ij}(1)$中最大者，

2) $(u_i p_{ij}^{(k)}) = (R_{ij}^{(k)})$是环流矩阵，并且$R_{ij}^{(k)}$仅在$u_i p_{ij} > u_j p_{ji}$时不为0。

由于1)与2)，我们称$({}_a p_{ij})$为$(p_{ij}(1))$的细致平衡部分，$\sum_k (p_{ij}^{(k)})$

为其环流部分。

定理说明了一个平稳马氏链的转移矩阵可以分解成细致平衡部分和由若干个环流组成的环流部分。

定理的证明：令

$$_{\alpha}p_{ij}=(u_i p_{ij}(1)\wedge u_j p_{ji}(1))/u_i.$$

我们就有

$$0\leqslant{}_{\alpha}p_{ij}\leqslant u_i p_{ij}(1)/u_i=p_{ij}(1),$$

与

$$u_i\,{}_{\alpha}p_{ij}=u_j\,{}_{\alpha}p_{ij}.$$

设有x_{ij}满足(5.1.18)且$0\leqslant x_{ij}\leqslant p_{ij}(1)$；那么

$$u_i x_{ij}\leqslant u_i p_{ij}(1),$$

$$u_j x_{ji}\leqslant u_j p_{ji}(1),$$

也就有

$$0\leqslant u_i x_{ij}=u_j x_{ij}\leqslant u_i p_{ij}(1)\wedge u_j p_{ji}(1)=u_i\,{}_{\alpha}p_{ij}$$

即

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant{}_{\alpha}p_{ij}.$$

说明$_{\alpha}p_{ij}$满足定理中条件1)。

又令

$$c_{ij}=u_i p_{ij}(1)-u_i\,{}_{\alpha}p_{ij},$$

容易看出：

$$0\leqslant c_{ij}\leqslant u_i p_{ij}(1),$$

$$c_{ij}c_{ji}=0,$$

且
$$\begin{aligned}\sum_i c_{ij}&=\sum_i u_i p_{ij}(1)-\sum_i u_i\,{}_{\alpha}p_{ij}\\&=\sum_i u_i p_{ij}(1)-\sum_i u_j\,{}_{\alpha}p_{ji}\\&=\sum_i u_i p_{ij}(1)-\sum_i u_j p_{ji}+\sum_i c_{ji}\end{aligned}$$

$$=u_j-u_j\sum_i p_{ji}+\sum_i c_{ji}$$

$$=\sum_i c_{ji}.$$

可见(c_{ij})满足引理5.1.1中条件(5.1.11)—(5.1.13)，由引理5.1.1，当$(c_{ij})\neq 0$，应有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{N}R_{ij}^{(k)}$$

因此

$$u_i p_{ij}(1)=u_i\,{}_a p_{ij}+\sum_{k=1}^{N}R_{ij}^{(k)}$$

令$p_{ij}^{(k)}=R_{ij}^{(k)}/u_i$，立刻可得

$$p_{ij}(1)={}_a p_{ij}+\sum_{k=1}^{N}p_{ij}^{(k)}.$$

此即需证。

注：定理5.1.1中条件$u_i>0$可以去掉．这时只需令：

$${}_a p_{ij}=\begin{cases}u_i p_{ij}\wedge u_j p_{ji} & u_i>0\\ p_{ij}(1) & u_i=0\end{cases}$$

$$p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}R_{ij}^{(k)}/u_i & u_i>0\\ 0 & u_i=0\end{cases}$$

定理5.1.2. （基本分解定理）可数状态马氏链若有转移矩阵$(p_{ij}(t))(t=1,2,\cdots)$，及平稳初分布$\{u_i\}$，则可以有分解式：

$$(u_i p_{ij})=(u_i\,{}_a p_{ij})+\sum_k(R_{ij}^{(k)})\qquad(5.1.19)$$

或

$$p_{ij}(1)={}_a p_{ij}+\sum_k p_{ij}^{(k)}\quad(i,j=1,2,\cdots)\qquad(5.1.20)$$

使得：

1) $({}_a p_{ij})$是具有性质(5.1.18)并保持$0\leqslant x_{ij}\leqslant p_{ij}(1)$中最大者；

2） $(u_i p_{ij}^{(k)})=(R_{ij}^{(k)})$是环流矩阵，并且$R_{ij}^{(k)}$仅在$u_i p_{ij}>u_j p_{ji}$时非0。

定理5.1.2后的那段说明，在此仍有效，不再重复。

证明　对任何正整数n，我们将n以后的所有状态合成一个状态，记为$(n+1)^*$。这样就形成一个新的有限个状态（$n+1$个状态）马氏链，它的转移矩阵记为：

$$_nP(t)=(_np_{ij}(t))$$

而

$$_np_{ij}(t)=\begin{cases} p_{ij}(t) & 当 i,j\leqslant n \\ \sum_{k>n}p_{ik}(t) & 当 i\leqslant n,\ j=(n+1)^* \\ \dfrac{\sum_{k>n}u_k p_{kj}}{\sum_{k>n}u_k} & 当 i=(n+1)^*, j\leqslant n \\ \dfrac{\sum_{k>n}\sum_{s>n}u_k p_{ks}}{\sum_{k>n}u_k} & 当 i=j=(n+1)^* \end{cases} \quad (5.1.21)$$

由于 $\sum_{k>n}u_k=0$（对某个n成立）的情形本质上和有限个状态无区别，所以我们不妨设$\sum_{k>n}u_k>0$。这样(5.1.21)式对一切$n>0$都是有意义的。

容易验证新的$n+1$个状态的马氏链，应有平稳分布$\{_nu_i\}$，其中

$$_nu_i=\begin{cases} u_i & i\leqslant n \\ \sum_{k>n}u_i & i=(n+1)^* \end{cases} \quad (5.1.21)'$$

并且

$$\sum_{i=1}^{n+1} {}_nu_i\, {}_np_{ij}(t)={}_nu_j,\ (j=1,2,\cdots,n,(n+1)^*)$$

由定理5.1.1，可知

$$_np_{ij}(1)={}_np_{ij}^{(0)}+\sum_k {}_np_{ij}^{(k)} \quad (i,j=1,2,\cdots,n,(n+1)^*)$$

$$(5.1.22)$$

由于

$$_np_{ij}^{(0)}={}_nu_i\,{}_np_{ij}(1)\wedge{}_nu_j\,{}_np_{ji}(1)$$

当$i,j\leqslant n$

$${}_{\alpha}p_{ij}^{(n)}=u_ip_{ij}(1)\wedge u_jp_{ji}(1)={}_{\alpha}p_{ij}$$

所以当$n\to+\infty$

$${}_{\alpha}p_{ij}^{(n)}\longrightarrow{}_{\alpha}p_{ij}\qquad(5.1.23)$$

另一方面（${}_nu_{in}p_{ij}^{(k)}$）=（${}_nR_{ij}^{(k)}$）是环流矩阵，我们将全部（$R_{ij}^{(k)}$）（$k=1,2,\cdots,N_n$）中，其路径包含状态（$n+1$）* 的那些环流矩阵记为（${}_n\widetilde{R}_{ij}^{(k)}$）$={}_n\widetilde{R}^{(k)}$，其余仍记为${}_nR^{(k)}$，这样分解式(5.1.22)就变成：

$${}_nu_i\,{}_np_{ij}(1)={}_nu_{i\alpha}p_{ij}^{(n)}+\sum_{k_1=1}^{N_n'}{}_nR_{ij}^{(k_1)}+\sum_{k_2=1}^{N_n''}{}_n\widetilde{R}_{ij}^{(k_2)}\qquad(5.1.24)$$

分解式(5.1.24)一般不唯一，但我们可以选择一种分解，使

$$\mathscr{R}_n\triangleq\{{}_nR^{(k_1)}|k_1=1,2,\cdots,N_n'\}\subseteq\mathscr{R}_{n+1}$$
$$=\{{}_nR^{(k_1)}|k_1=1,\cdots,N_{n+1}'\}$$

于是，我们令

$$\mathscr{R}\triangleq\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}_n.\qquad(5.1.24)'$$

又由于${}_n\widetilde{R}^{(k_2)}$的路径中必须含状态($n+1$)*，设它的路径上($n+1$)*的后一个状态是$S_{k_2}$，则

$$\widetilde{R}_{(n+1)*S_{k_2}}>0$$

而且${}_n\widetilde{R}_{(n+1)*S_{k_2}}$一定就是${}_n\widetilde{R}^{(k_2)}$的环流量$\alpha_{k_2}$，那么

$${}_n\widetilde{R}_{ij}^{(k_2)}\leqslant\alpha_{k_2}=\widetilde{R}_{(n+1)*}^{(k_2)}S_{k_2}\quad(S_k\in\{1,2,\cdots,n\})$$

这样就有

$$0\leqslant\sum_{k_2=1}^{N_n''}{}_n\widetilde{R}_{ij}^{(k_2)}\leqslant\sum_{k_2=1}^{N_n''}{}_n\widetilde{R}_{(n+1)*S_{k_2}}^{(k_2)}$$

$$= \sum_{k_2=1}^{N_M''} \sum_{j=S_k} {}_n\widetilde{R}_{(n+1)*j}^{(k_2)}$$

$$\leqslant \sum_{k_2=1}^{N_M''} \sum_{j=1}^{n} {}_n\widetilde{R}_{(n+1)*j}^{(k_2)} \qquad (\text{由 } \widetilde{R}_{ij}^{(k_2)} \geqslant 0)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{N_M''} {}_n\widetilde{R}_{(n+1)*j}^{(k_2)}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} {}_nu_{(n+1)*} \ {}_np_{(n+1)*j}(1) \qquad (\text{由}(5.1.24))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k>n} u_k \right) \cdot \frac{\sum_{k>n} u_k \ p_{kj}}{\sum_{k>n} u_k}$$

(由(5.1.21)与(5.1.21)′)

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k>n} u_k p_{kj}.$$

$$= \sum_{k>n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{kj} \right) u_k = \sum_{k>n} u_k$$

由于$\{u_i\}$是平稳分布，故$\sum_k u_k < +\infty$，因而

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k>n} u_k = 0$$

因此，由前面的不等式

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k_2=1}^{N_n''} {}_n\widetilde{R}_{ij}^{(k_2)} = 0$$

由此，在(5.1.24)两边令$n\to+\infty$，得到

$$u_i p_{ij}(1) = u_i \ {}_0p_{ij} + \sum_k R_{ij}^{(k)} \tag{5.1.26}$$

(见(5.1.23)，(5.1.25)与 (5.1.21))其中右边和号取遍一切R(见(5.1.24)′)中的元素，它们最多是可列个。

再令：

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} R_{ij}^{(k)}/u_i & \text{当} u_i > 0 \\ 0 & \text{当} u_i = 0 \end{cases}$$

到此定理证完。

系1：当马氏链可逆，则分解式(5.1.19)中环流部分$\sum_k(R_{ij}^{(k)})$为0，即

$$u_i p_{ij}=u_{i\ a}p_{ij}=u_i p_{ij}\wedge u_j p_{ji}=u_j p_{ji}. \qquad (5.1.27)$$

系2：对无穷维矩阵$c=(c_{ij})$，只要满足引理5.1.1中的条件(5.1.11)、(5.1.12)与(5.1.13)且$\sum_{ij}c_{ij}<+\infty$（将它记为c_0），则c可以有分解：

$$c=\sum_k R^{(k)}\ (\text{或}c_{ij}=\sum_k R_{ij}^{(k)},\ R^{(k)}=(R_{ij}))$$

其中$R^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots)$是环流矩阵，并且$R_{ij}^{(k)}$仅在$c_{ij}\neq 0$时才可非零，和号下最多为可列项。

证明 令

$$p_{ij}=\begin{cases} c_{ij}/2\sum_j c_{ij} & \text{当}\sum_j c_{ij}\neq 0,\ i\neq j \\ 0 & \text{当}\sum_j c_{ij}=0,\ i\neq j \\ \dfrac{1}{2} & \text{当}\sum_j c_{ij}\neq 0,\ i=j \\ 1 & \text{当}\sum_j c_{ij}=0,\ i=j \end{cases}$$

则$u_i=\sum_j c_{ij}/c_0$，$c_{ij}=c_0(u_i p_{ij}-u_{i\ a}p_{ij})$可以分解成所要求形式。

定义5.1.2. （旋量）设有n个不同的状态$i_1, i_2, \cdots, i_n$，又如果$p_{i_1i_2}(1)p_{i_2i_3}(1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(1)\ p_{i_ni_1}(1)$与$p_{i_2i_1}(1)\ p_{i_3i_2}(1)\cdots p_{i_ni_{n-1}}(1)p_{i_1i_n}(1)$不同时为0，则称

$$\log\prod_{s=1}^{n}\frac{p_{i_si_{s+1}}(1)}{p_{i_{s+1}i_s}(1)} \qquad (i_{n+1}=i_1)(\text{可取}\pm\infty\text{值})$$

为沿闭路$i_1\to i_2\to\cdots\to i_n\to i_1$的旋量，记为$r_{i_1i_2\cdots i_n}$。又如果有一闭路$i_1\to i_2\to\cdots\to i_n\to i_1$使得

$$r_{i_1i_2\cdots i_n}>0$$

则称沿此闭路有一个环流。

定理5.1.3. 一个平稳不可约马氏链不可逆的充要条件是它至少有一个环流。

证明 若马氏链可逆，那么

$$u_i p_{ij}(1) = u_j p_{ji}(1)$$

因此

$$r_{i_1\cdots i_n} = \log \prod_{s=1}^{n} \frac{p_{i_s i_{s+1}}}{p_{i_{s+1} i_s}} = \log \prod_{s=1}^{n} \frac{u_{i_s} p_{i_s i_{s+1}}}{u_{i_{s+1}} p_{i_{s+1} i_s}}$$

$$= \log 1 = 0$$

可见不存在环流。

反之，若不可逆，则

$$u_i p_{ij}(1) = u_{i\,0} p_{ij} + \sum_k R_{ij}^{(k)}$$

其中$\sum_k R_{ij}^{(k)}$中至少有一项，那么

$$u_i p_{ij}(1) - u_j p_{ji}(1) = \sum_k (R_{ij}^{(k)} - R_{ji}^{(k)})$$

若设$(R_{ij}^{(1)})$的路径是$i_1, i_2, \cdots, i_n$，环流量是α_1，那么

$$u_{i_s} p_{i_s i_{s+1}} - u_{i_{s+1}} p_{i_{s+1} i_s} \geqslant R_{i_s i_{s+1}}^{(1)} - R_{i_{s+1} i_s}^{(1)}$$

$$= R_{i_s i_{s+1}}^{(1)} = \alpha_1 > 0.$$

因此

$$r_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \log \prod_{s=1}^{n} \frac{p_{i_s i_{s+1}}(1)}{p_{i_{s+1} i_s}(1)}$$

$$= \log \prod_{s=1}^{n} \frac{p_{i_s i_{s+1}}(1) \cdot u_{i_s}}{p_{i_{s+1} i_s}(1) u_{i_{s+1}}} \quad (\because\ i_{n+1} = i_1)$$

$$\geqslant \log \prod_{s=1}^{n} \frac{p_{i_{s+1} i_s}(1) u_{i_{s+1}} + \alpha_1}{p_{i_{s+1} i_s}(1) u_{i_{s+1}}} > 0$$

可见$i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n \to i_1$中存在环流。

§5.2. 独立环流的个数的唯一性

在本节基本分解定理中所作的分解方法，即使在有限状态的情况下也不唯一，例如

$$(p_{ij}(1)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad (5.2.1)$$

可以验证

$$(u_1, u_2, \cdots, u_8) = \left(\frac{2}{22}, \frac{2}{22}, \frac{4}{22}, \frac{2}{22}, \frac{2}{22}, \frac{4}{22}, \frac{3}{22}, \frac{3}{22}\right)$$

则按上节定理5.1.1，可以有分解

$$(u_i p_{ij}) = \frac{1}{22}\,\mathrm{I} + \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{22} \qquad (5.2.2)$$

但也可有另一种分解符合定理5.1.1中的要求。

$$(u_i p_{ij}(1)) = \frac{1}{22}\,\mathrm{I} + \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

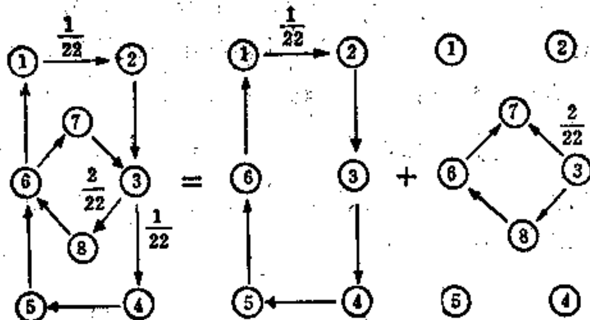
$$
+\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
+\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.2.3)
$$

分解式（5.2.2）与（5.2.3）不仅分解所得的环流矩阵不同，而且包含的环流矩阵的个数都不同，在（5.2.2）中有二个环流，而（5.2.3）中有三个环流，示意图见图5.2.1。

在物理问题中，往往环流代表物理参数。环流分解的方法不唯一是易于理解的，因为物理参数可以有不同的选取法。然而，独立环流的个数不应该不同。怎样理解上面所举的例子中出现的情况呢？本节的定理说明了在上述例子中出现的情况恰好是系统达到了一种退化的巧合。如果允许系统有一点极小的误差，那么，独立环流的个数就是确定的，它不会随分解方法的不同而异。而实际的物理系统就正是这样的。

(5.2.2)的分解



(5.2.3)的分解

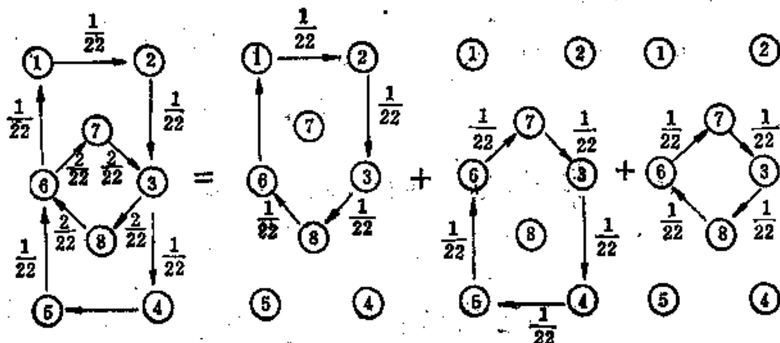


图5.2.1

定理5.2.1. 设矩阵$C=(c_{ij})$满足引理5.1.1中条件(5.1.11)、(5.1.12)与(5.1.13)，(以下为方便起见将此三条件统称为条件(c))，令

$$n_0=\min\{m;\ C=R_m^{(1)}+R_m^{(2)}+\cdots+R_m^{(m)},\ R_m^{k}\text{为环流矩阵}\} \tag{5.2.4}$$

又设$n_0<+\infty$，且

$$C=R^{(1)}+R^{(2)}+\cdots+R^{(n_0)} \tag{5.2.5}$$

$(R^{(k)}=(R_{ij}^{(k)})$是环流矩阵$)$

则$R^{(1)}$，$R^{(2)}$，…，$R^{(n_0)}$是线性无关的(就是说，在使环流矩阵的个数达到最少的分解中，各环流矩阵组成线性独立组)。

证明 用反证法，设结论不真，则存在h_1，…，h_{n_0}使

$$\sum_{k=1}^{n_0} h_k R_{ij}^{(k)} = 0 \quad (\text{对一切} i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (5.2.6)$$

不妨设h_1，h_2，…，$h_s > 0$，$h_{s+1}, h_{s+2}, \cdots, h_{n_0} \leqslant 0$。$h_1 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant s} h_k$，则存在$1 > \alpha_k > 0$，使

$$\frac{h_k}{h_1} = 1 - \alpha_k \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

于是(5.2.6) 变为

$$R^{(1)} + \sum_{k=2}^{s} (1 - \alpha_k) R^{(k)} = \sum_{k=s+1}^{n_0} \left(-\frac{h_k}{h_1}\right) R^{(k)}$$

令

$$\alpha_k = -\frac{h_k}{h_1} > 0 \quad (k = s+1,\ s+2,\ \cdots,\ n_0)$$

那末

$$\sum_{k=1}^{s} R^{(k)} = \sum_{k=2}^{n_0} \alpha_k R^{(k)}$$

于是

$$C = \sum_{k=1}^{n_0} R^{(k)} = \sum_{k=2}^{n_0} \alpha_k R^{(k)} + \sum_{k=s+1}^{n_0} R^{(k)}$$
$$= \sum_{k=2}^{n_0} R^{(k)}_{n_0-1}$$

(其中

$$R^{(k)}_{n_0-1} = \begin{cases} (1 + \alpha_k) R^{(k)} & s < k \leqslant n_0 \\ \alpha_k R^{(k)} & 2 \leqslant k \leqslant s \end{cases}$$

是环流矩阵。)这与n_0的最小性矛盾。证完。

定义5.2.1. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为包含于 $B = (b_{ij})$ 中 (记为$A \prec B$)如果由$b_{ij} = 0$，必有$a_{ij} = 0$。

在本章§5.1中环流分解定理中的所有 $R^{(k)} \prec (u_i p_{ij} - u_j p_{ji})$ 与 $R^{(k)} \prec (u_i p_{ij} - u_{i\ a} p_{ij})$。

令

$$c_{ij} = u_i p_{ij}(1) - u_i p_{ij} \wedge u_j p_{ji}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \{E_{:}\ E \prec c,\ \text{且}E\text{满足条件}(5.1.13)\} \qquad (5.2.7)$$

$$\mathcal{E}_{\epsilon} = \{E_{:}\ E \prec c,\ c+E\text{满足条件}(c),\ \text{且}\ E=(e_{ij}),\ |e_{ij}| < \epsilon\} \qquad (5.2.8)$$

显然$\widetilde{\mathcal{E}}$是一个线性空间，对于$E \in \widetilde{\mathcal{E}}$，总存在一个$\delta_0 > 0$，只要$0 < \delta < \delta_0$，就有$\delta E \in \mathcal{E}_{\epsilon}$。

又记

$$\mathcal{R} = \{R_{:}\ R\text{是环流矩阵，且}R \prec C\} \qquad (5.2.9)$$

与

$$\mathcal{R}^0 = \{R_{:}\ R \in \mathcal{R},\ R=(r_{ij}),\ r_{ij}=0\text{或}1\} \qquad (5.2.10)$$

易见$\mathcal{R} \subset \widetilde{\mathcal{E}}$。再令

$$m_0 = \mathcal{R}\text{中线性独立元素的个数。}(m_0\text{可取}+\infty) \qquad (5.2.11)$$

引理5.2.1. 若$m_0 < +\infty$，则存在$\mathcal{E}_{\epsilon}$中的元素，它不能表为$\mathcal{R}^0$中m_0-1个元素的线性组合。

证明 由于$m_0 < +\infty$，所以由定理5.2.1与上节环流分解定理可以知道$n_0 \leqslant m_0 < +\infty$，那么$C$矩阵中非零元素的个数最多只有有限个，因此$\mathcal{R}^0$中的总元素数有限，以$\mathcal{R}^0$中$m_0-1$个元素张成的线性空间也只有有限个，分别将它们记为$X_1, X_2, \cdots, X_s$。下面我们用数学归纳法证明：对任意$q(\leqslant s)$个：$X_{i_1}, \cdots, X_{i_q}$，必存在$A_q \in \widetilde{\mathcal{E}}$，使$A_q$不属于任一个空间$X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_q}$。

对$q=1$，由m_0的定义，对任意一个X_i，一定存在环流矩阵$A \in \mathcal{R}$，但$A \overline{\in} X_i$。

设对q要证的结论正确，现证对$q+1$此结论也正确. 对于任给$X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_q},X_{i_{q+1}}$，既然对$q$结论正确，那么必存在环流矩阵$A_q\in\mathcal{B}$，但$A_q\bar{\in}X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_q}$.如果$A_q\bar{\in}X_{i_{q+1}}$，则令$A_{q+1}=A_q$即可.所以不妨设$A_q\in X_{i_{q+1}}$，这时又存在环流矩阵$\widetilde{A}_q\in\mathcal{B}$，使$\widetilde{A}_q\bar{\in}X_{i_1},\cdots,X_{i_{q-1}},X_{i_{q+1}}$，如果$\widetilde{A}_q\bar{\in}X_{i_q}$，只要令$A_{q+1}=\widetilde{A}_q$即可. 所以又可以设$\widetilde{A}_q\in X_{i_q}$. 于是对任意二个非零常数$\beta_1,\beta_2$. 有

$$\beta_1A_q+\beta_2\widetilde{A}_q\bar{\in}X_{i_q},\ X_{i_{q+1}}$$

令A_q与$\widetilde{A}_q$所张的线性空间为X，则由A_q，$\widetilde{A}_q$的定义可知二维空间X不能包含于X_{i_1}，X_{i_2}，$\cdots$，$X_{i_{q-1}}$之任意一个中. 因此最多只能有一个值α_k使

$$A_q+\alpha_k\widetilde{A}_q\in X_k\ (k=i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{q-1})$$

而对其它$\alpha\neq\alpha_k$均有

$$A_q+\alpha\widetilde{A}_q\bar{\in}X_q$$

任取$\alpha_0\neq\alpha_1$，α_2，$\cdots$，α_{q-1}，0，令

$$A_{q+1}=A_q+\alpha_0\widetilde{A}_q$$

则$A_{q+1}\bar{\in}X_{i_1}$，X_{i_2}，$\cdots$，$X_{i_{q-1}}$，又由于$A_q\bar{\in}X_{i_q}$，而$\widetilde{A}_q\in X_{i_q}$，所以$A_{q+1}\bar{\in}X_{i_q}$，而$A_q\in X_{i_{q+1}}$，但是$\widetilde{A}_q\bar{\in}X_{i_{q+1}}$，所以$A_{q+1}\bar{\in}X_{i_{q+1}}$，显然$A_{q+1}\in\widetilde{\mathcal{E}}$由数学归纳法所要证的结论得证.

所以，可以找到$A_s\bar{\in}X_1$，X_2，$\cdots$，X_s，再取$\delta>0$充分小，就可以使$\delta A_s\in\mathcal{E}_s$，(这是因为$C$的非零元素只有有限个，当然$A_s$的非零元素也只有有限个，因而上述充分小的$\delta>0$存在)。引理证毕.

定理5.2.2. 设矩阵C满足条件(c)，又令

$$N_\varepsilon=\max_{E\in\mathcal{E}_\varepsilon}\{\min\{m; \ C+E=R_m^{(1)}+\cdots+R_m^{(m)},R_m^{(k)}\in\mathcal{R}\}\}(\epsilon>0),$$

(5.2.12)

则

$$m_0=N_\varepsilon \text{（或同时为}+\infty\text{）} \tag{5.2.13}$$

证明 若$N_\varepsilon=+\infty$，则对任意大的正数L，必存在$E\in\mathcal{E}_\varepsilon$，使$C+E$的极小环流分解中的环流矩阵个数大于$L$。由定理5.2.1知，这些环流矩阵是线性无关的，因此$m_0\geqslant L$，由L的任意性可知$m_0=+\infty$，即N_ε，m_0均为$+\infty$。

若$N_\varepsilon<+\infty$，设N_ε的定义所涉及的max在$E_0\in\mathcal{E}_\varepsilon$上达到，那末，存在环流矩阵$R^{(1)}$，$R^{(2)},\cdots,R^{(N\varepsilon)}$使$C+E_0$有最少个数的环流分解

$$C+E_0=R^{(1)}+R^{(2)}+\cdots+R^{(N\varepsilon)} \tag{5.2.14}$$

由定理5.2.1知$R^{(1)}$，$R^{(2)}$，…，$R^{(N\varepsilon)}$线性无关，因此

$$m_0\geqslant N_\varepsilon. \tag{5.2.15}$$

另一方面，由(5.2.14)与$E_0\prec C$可以知道C矩阵中非零元素的个数至多只有有限个，当然$m_0<+\infty$。下面我们往证 $m_0=N_\varepsilon$。

因为$m_0<+\infty$，由引理5.2.1知道，存在$A\in\mathcal{E}_\varepsilon$使得在$R^0$的任意一组极大线性无关组下，$A=(a_{ij})$的环流分解都有$m_0$项非零。设任取$\mathcal{R}^0$中一个极大线性无关组：$R^{(1)}$，…，$R^{(m_0)}$，则

$$A=\sum_{k=1}^{m_0}\alpha_k R^{(k)}(\alpha_k\neq0,\text{ 对}k=1,2,\cdots,m_0)$$
$$C=\sum_{k=1}^{m_0}\gamma_k R^{(k)}.$$

令

$$\alpha=\max_k|\alpha_k|>0,$$

$$\gamma=\min_k|\gamma_k|>0,\ (\gamma_k\neq0)$$

$$\epsilon_0 = \min\left(\frac{\gamma}{2\alpha},\ 1\right) > 0$$

取 $E = \epsilon_0 A$，则 $E \in \mathscr{E}_\epsilon$，而且

$$C + E = C + \epsilon_0 A = \sum_{k=1}^{m_0} (\gamma_k + \epsilon_0 \alpha_k) R^{(k)}$$

当$\gamma_k = 0$时，$\gamma_k + \epsilon_0 \alpha_k \neq 0$；当$\gamma_k \neq 0$时

$$|\gamma_k + \epsilon_0 \alpha_k| \geqslant |\gamma_k| - \frac{\gamma}{2\alpha} |\alpha_k| \geqslant \gamma - \frac{\gamma}{2\alpha}\alpha = \frac{\gamma}{2} > 0.$$

可见，我们总能找到$E = \epsilon_0 A$，不管对$\mathscr{B}^0$的哪一组极大线性无关组，$C + E$的环流分解系数都全不为0，因此$N_\epsilon = m_0$。定理证毕。

§5.3. 满足前进方程的平稳保守Q过程的概率流速分解

在本章§5.1中，我们看到对离散参数的平稳马氏链来说，经过一步由i转到j的概率是$u_i p_{ij}(1)$，它可以分解成细致平衡与环流平衡两部分，在连续时间参数的条件下，就应该考虑流速——单位时间由i流到j的概率，$u_i q_{ij}$的分解。

引理5.3.1. 若Q保守[3]，Q过程$P(t)$满足前进方程，且有平稳分布$\{u_i\}$，则

$$(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n \cdots) Q = 0. \tag{5.3.1}$$

证明 由前进方程的积分形式得

$$\int_0^T \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(t)} q_{kj} dt = p_{ij}(T) - p_{ij}(0) - \int_0^T p_{ij}(t) q_{jj} dt \tag{5.3.2}$$

两边乘以u_i后求和，再用Fubini定理及$\{u_i\}$的不变性，可知

$$\sum_{k\neq j}\sum_i\int_0^T u_i p_{ik}(t)dt\, q_{kj}=\sum_i\int_0^T u_i p_{ij}(t)dt q_j$$

又由$Levi$定理及$\{u_i\}$的不变性得

$$\sum_{k\neq j}u_k q_{kj}=u_j q_j,$$

即

$$\sum_k u_k q_{kj}=0。$$

定理5.3.1. 设Q保守，又存在一个满足前进方程的Q-过程$P(t)=(p_{ij}(t))$，它有平稳初分布$\{u_i\}$，则"概率流速"矩阵$(u_i q_{ij})$可有如下的分解：

$$u_i q_{ij}=u_i q_{ij}^{(d)}+\sum_k r_{ij}^{(k)}+r_{ij}^{(\infty)} \qquad (5.3.3)$$

其中

1) $(q_{ij}^{(d)})$是Q的细致平衡部分，它是满足$u_i x_{ij}=u_j x_{ji}$，$0\leqslant|q_{ij}^{(d)}|\leqslant|q_{ij}|$，$q_{ij}^{(d)}\geqslant 0(i\neq j)$，$-q_{ii}^{(d)}=q_i^{(d)}\geqslant 0$各条件中具有最大绝对值者。

2) $(r_{ij}^{(k)})$是第k个环流矩阵。

3) $(r_{ij}^{(\infty)})$满足对任何正整数N，有

$$\sum_{i<N}\sum_{j>N}r_{ij}^{(\infty)}=\sum_{i<N}\sum_{j>N}r_{ji}^{(\infty)}$$

而且不再存在环流矩阵含于$(r_{ij}^{(\infty)})$中(见定义5.2.1)并且满足条件(c)。我们称$(r_{ij}^{(\infty)})$为"无穷余流阵"。

证明 与定理5.1.2类似，我们引入辅助状态$(n+1)^*$，令

$$q_{ij}(n)=\begin{cases} q_{ij} & i,j\leqslant n \\ \sum_{k>n}q_{ik} & i\leqslant n,\ j=(n+1)^* \\ \sum_{k>n}q_{kj}u_k/\sum_{k>n}u_k & j\leqslant n,\ i(n+1)^* \\ -\sum_{k\leqslant M}q_{(n+1)^*k}(n) & i=j=(n+1)^* \end{cases}$$

记

$$\underline{u}(n)=(u_1(n),\ \cdots,\ u_n(n),\ u_{(n+1)^*}(n))$$

$$\triangleq(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \sum_{k>n}u_k)$$

则$Q(n)$保守，并且由引理5.3.1可知

$$\underline{u}(n)Q(n)=0_{\circ}$$

再设

$$Q^{(d)}(n)=(q_{ij}^{(d)}(n))$$

其中

$$q_{ij}^{(d)}(n)=\begin{cases} q_{ij}(n) & \text{当}u_i=0 \\ (u_i(n)q_{ij}(n)\wedge u_j(n)q_{ji}(n))/u_i(n) & \text{当}u_i\neq 0 \end{cases}$$

$$q_{ij}^{(d)}=\begin{cases} (u_iq_{ij}\wedge u_jq_{ji})/u_i & \text{当}u_i\neq 0 \\ q_{ji} & \text{当}u_i=0 \end{cases}$$

显然，当$n\to+\infty$时，$q_{ij}^{(d)}(n)\to q_{ij}^{(d)}$。令

$$C(n)=(c_{ij}(n))$$

其中

$$c_{ij}(n)=u_i(n)q_{ij}(n)-u_i(n)q_{ij}(n)\wedge u_j(n)q_{ji}(n)$$

则矩阵$C(n)$满足条件(c)，由引理5.1.1知道$C(n)$可以分解为环流矩阵之和。

$$C(n)=\sum_k R^{(k)}(n)+\sum_{k'}\widetilde{R}^{(k)}(n)_{\circ}$$

其中$R^{(k)}(n)$和$\widetilde{R}^{(k')}(n)$分别是不经过$(n+1)^*$与经$(n+1)^*$的环流矩阵。设

$$R^{(k)}(n)=(r_{ij}^{(k)}(n)),\quad \widetilde{R}^{(k')}(n)=(\widetilde{r}_{ij}^{(k)}(n))_{\circ}$$

与定理5.1.2类似可证

$$r_{ij}^{(k)}(n)\to r_{ij}^{(k)}\qquad(n\to+\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k'}\widetilde{r}_{ij}^{(k)}(n)$$

存在有限，我们记它为$r_{ij}^{(\infty)}$。

由于$\widetilde{R}^{(k')}(n)$是环流矩阵，所以对任意的n，只要n充分大就有

$$\sum_{\substack{i<n\\j>n}}\widetilde{r}_{ij}^{(k')}(n)=\sum_{\substack{i<n\\j>n}}\widetilde{r}_{ji}^{(k')}(n)$$

对k'求和，再令$n\to+\infty$，即得到

$$\sum_{\substack{i<n\\j>n}}r_{ij}^{(\infty)}=\sum_{\substack{i<n\\j>n}}r_{ji}^{(\infty)}.$$

系1 若Q保守，而且其最小过程$\{u_i\}$有平稳初分布$\{u_i\}$，则对此最小过程，定理中的概率流速分解定理成立。

定理5.3.2. 对密度矩阵Q若有Q-过程具有平稳分布$\{u_i\}$并有

$$\sum_i u_i q_i<+\infty \tag{5.3.4}$$

则

$$u_i q_{ij}=u_i q_{ij}^{(d)}+\sum_k R_{ij}^{(k)} \tag{5.3.5}$$

其中1) $u_i q_{ij}^{(d)}$同定理5.3.1中1)。

2) $(R_{ij}^{(k)})$是环流矩阵，(5.3.5)式中和号下最多有可列项。

证明 可以证明当(5.3.4)满足时，Q-过程唯一[2]。再令：

$$u_i q_{ij}^{(d)}=u_i q_{ij}\wedge u_j q_{ji}$$

即

$$q_{ij}^{(d)}=\begin{cases}u_i q_{ij}\wedge u_j q_{ji}/u_i & \text{当}u_i\neq0\\ 0 & \text{当}u_i=0,\ i\neq j\\ q_{ii} & \text{当}u_i=0,\ i=j\end{cases}$$

然而，由于Q-过程唯一，则它就是最小过程因而满足前进方程：

$$\underline{u}\,Q=0.$$

所以

$$\sum_i u_i q_{ij}=0=\sum_i u_j q_{ji}.$$

那么 $c_{ij}\geqslant0$，$c_{ij}\ c_{ji}=0$

$$\sum_i c_{ij}=\sum_i(u_i q_{ij}-u_j q_{ij}^{(d)})=$$
$$=\sum_i(u_j q_{ji}-u_j q_{ji}^{(d)})=\sum_i c_{ji}$$

所以(c_{ij})满足条件(c)。而且

$$\sum_{ij}c_{ij}\leqslant\sum_{i\neq j}u_iq_{ij}=\sum_i u_i\sum_{j\neq i}q_{ij}$$
$$=\sum_i u_iq_i<+\infty。$$

由定理5.1.2的系2就得到所求证的结果。

系1 对保守的密度矩阵Q，若$|q_{ij}|<c(i,j=1,2,\cdots)$，并且它的$Q$-过程有平稳分布$\{u_i\}$，则对$Q$可作定理中所述的分解。

证明 由于

$$\sum_i u_iq_i\leqslant c\sum_i u_i<+\infty$$

由定理立刻得到结果。

注：汪培庄曾用另一种方法直接证明了定理5.1.2系2与本定理系1。

§5.4. 平稳马氏链对时间的倒逆

在第一章§1.1中我们已经看出，当

$$u_ip_{ij}=u_jp_{ji}$$

时，马氏链可逆，也即当本章§5.1分解式(5.1.19)中没有环流部分时，将原马氏链的时间倒转后所得的新马氏链是和原来一样的。

对于平稳单环流马氏链(见本章§5.4定理5.4.1)，若将时间倒逆过来看，新的马氏链的转移函数应为

$$p_{ij}^{-}(1)=\frac{u_jp_{ji}(1)}{u_i}=\begin{cases}1-\dfrac{a}{u_i} & i=j\\ \dfrac{a}{u_i} & j=i-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

也就是

$$
P^{-}=(\overline{p_{ij}})=\begin{pmatrix}
1-\frac{a}{u_1} & & & & \frac{a}{u_1}\\
\frac{a}{u_2} & 1-\frac{a}{u_2} & & & \\
 & \frac{a}{u_3} & 1-\frac{a}{u_3} & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & \frac{a}{u_n} & 1-\frac{a}{u_n}
\end{pmatrix}
$$

容易看出它的平稳分布仍是$\{u_i\}$,而且它还是单环流，只是环流的方向正好和原来相反。

一般地我们有：

定理5.4.1. 平稳马氏链$P(t)$(平稳分布是$\{u_i\}$)，若按定理5.1.2,有分解式

$$p_{ij}(1)={}_ap_{ij}(1)+\sum_k R_{ij}^{(k)}/u_i$$

那么它的倒逆马氏链仍然平稳，而且按定理5.1.2的分解式可以是：

$$\overline{p_{ij}}(1)={}_ap_{ij}(1)+\sum_k R_{ji}^{(k)}/u_i.$$

证明 由于，对$t_1<t_2<\cdots<t_n$，有

$$
\begin{aligned}
&P(X(t_1)=i_1\mid X(t_2)=i_2,\ \cdots,\ X(t_n)=i_n)\\
&=\frac{P(X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n)}{P(X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n)}\\
&=\frac{P(X(t_1)=i_1)\cdot p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})}{P(X(t_2)=i_2)p_{i_2i_3}(t_3-t_2)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})}\\
&=\frac{P(X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2)}{P(X(t_2)=i_2)}\\
&=P(X(t_1)=i_1\mid X(t_2)=i_2).
\end{aligned}
$$

可见倒逆后仍是一个马氏链，它的转移矩阵是：

$$\bar{p}_{ij}(t)=P(X(s)=j\,|\,X(t+s)=i)=\frac{u_j p_{ji}(t)}{u_i}.$$

由定理5.1.2的分解得到：

$$\bar{p}_{ij}(1)=\frac{u_{j\alpha}p_{ji}+\sum_k R_{ji}^{(k)}}{u_i}$$

$$=\frac{u_{i\alpha}p_{ij}+\sum_k R_{ji}^{(k)}}{u_i}$$

$$={}_\alpha p_{ij}+\sum_k R_{ji}^{(k)}/u_i.$$

定理5.4.2. 若保守Q-过程$P(t)=(p_{ij}(t))$满足前进方程有平稳初分布$\{u_i\}$，并按定理5.3.1有分解式：

$$u_i q_{ij}=u_i q_{ij}^{(d)}+\sum_k r_{ij}^{(k)}+r_{ij}^{(\infty)}$$

则将时间倒逆后所得的新马氏链仍是一个平稳马氏链，它的密度矩阵$Q^-=(\bar{q}_{ij})$可分解为：

$$u_i\bar{q}_{ij}=u_i q_{ij}^{(d)}+\sum_k r_{ji}^{(k)}+r_{ji}^{(\infty)}.$$

证明 由定理5.4.1的证明可知：

$$u_i\bar{p}_{ij}(\delta)=u_j p_{ji}(\delta)$$

所以

$$\frac{u_i(\bar{p}_{ij}(\delta)-\delta_{ij})}{\delta}=\frac{u_j p_{ji}(\delta)-u_i\delta_{ij}}{\delta}$$

$$=u_j\frac{p_{ji}(\delta)-\delta_{ji}}{\delta}\xrightarrow{\delta\to 0+}u_j q_{ji}.$$

可见

$$u_i\bar{q}_{ij}=u_j q_{ji}$$

$$=u_j q_{ji}^{(d)}+\sum_k r_{ji}^{(k)}+r_{ji}^{(\infty)}.$$

而其中$u_j q_{ij}^{(d)} = u_i \bar{q}_{ij} \wedge u_j \bar{q}_{ji}$正好是满足定理5.3.1的细致平衡的要求，因而$q_{ij}^{(d)}$正是$\bar{q}_{ij}$的细致平衡部分。记$r_{ij}^{(k)} = \bar{r}_{ij}^{(k)}$与$r_{ij}^{(\infty)} = \bar{r}_{ij}^{(\infty)}$，它们也分别都满足定理5.3.1中的相应要求。证毕。

从定理5.4.1与定理5.4.2可见细致平衡部分是保持倒逆不变的部分，而$\sum_k r_{ij}^{(k)} + r_{ij}^{(\infty)}$(总称为环流部分，记为R)则是在时间倒逆时恰恰仅反转流向的部分。

系1 可将保守的Q分解成：

$$Q = L_1 + L_2,$$

同时它的倒逆的密度矩阵有分解

$$Q^- = L_1 - L_2.$$

证明 令

$$L_1 = (q_{ij}^{(d)}) + (Q^{(R)} + \bar{Q}^{(R)})/2,$$

$$L_2 = (Q^{(R)} - \bar{Q}^{(R)})/2.$$

其中$Q^{(R)} = (q_{ij}^{(R)})$是

$$q_{ij}^{(R)} = \begin{cases} (\sum_k r_{ij}^{(k)} + r_{ij}^{(\infty)})/u_i & \text{当} u_i \neq 0 \\ 0 & \text{当} u_i = 0 \end{cases}$$

而$\bar{Q}^{(R)} = (\bar{q}_{ij}^{(R)})$为

$$\bar{q}_{ij} = \begin{cases} (\sum_k r_{ji}^{(k)} + r_{ji}^{(\infty)})/u_i & \text{当} u_i \neq 0 \\ 0 & \text{当} u_i = 0 \end{cases}$$

显然$Q = L_1 + L_2$，$Q^- = L_1 - L_2$。

§5.5. 非稳定流的分解

前面的环流分解定理可推广到非平稳概率流与概率流速情况。

定理5.5.1. 设有马氏链的转移矩阵为$P=(p_{ij})$,设时刻t的分布为$\{\rho_i(t)\}$,在$t\to t+1$这一段时间(这一步)各状态间的概率流$\rho_i(t)p_{ij}(1)$可以分解为:

$$\rho_i(t)p_{ij}(1)=\rho_i(t)_a p_{ij}(t)+\sum_k r_{ij}^{(k)}(t)+\sum_l q_{ij}^{(l)}(t)$$

其中1) $_a p_{ij}(t)$是满足等式

$$\rho_i(t)x_{ij}=\rho_j(t)x_{ji}$$

并使$0\leqslant x_{ij}\leqslant p_{ij}(1)$的最大者。$\rho_{ia}p_{ij}(t)$称为概率流的细致平衡部分;

2) $(r_{ij}^{(k)}(t))$是环流矩阵,$(\sum_k r_{ij}^{(k)})$称为概率流的环流部分;

3) $(g_{ij}^{(l)})$满足:存在状态$i_1^l,i_2^l\cdots,i_{n_l}^l$彼此不同,记集合$\{(i_1^l,i_2^l),(i_2^l,i_3^l),\cdots,(i_{n_l-2}^l,i_{n_l}^l)\}$为

$$g_{ij}^{(l)}=\begin{cases}b_l\text{当}\ (i,j)\in r^{(l)}\\ 0\ \text{其它}\end{cases}$$

称$(\sum_l g_{ij}^{(l)})$为概率流的散流部分。

4) 并且$\gamma_{ij}^{(k)}(t)-\gamma_{ji}^{(k)}(t)$,$q_{ij}^{(l)}-q_{ji}^{(l)}$与$\rho_i p_{ij}-\rho_j p_{ji}$同号。

证明 令

$$\begin{aligned}
c_{ij}&=\rho_i p_{ij}-\rho_i p_{ij}\wedge\rho_j p_{ji}\\
c_{\triangle j}&=\sum_k c_{jk}-\sum_k c_{jk}\wedge\sum_k c_{kj}\\
c_{i\triangle}&=\sum_k c_{ik}\vee\sum_k c_{ki}-\sum_k c_{ik}\\
c_{\triangle\triangle}&=0
\end{aligned}$$

则:$c_{ij}\geqslant 0$,$c_{ij}\cdot c_{ji}=0$ 对$i,j=0,1,2,\cdots$成立。

而且

$$c_{ij}\leqslant\rho_i p_{ij},\ c_{i\triangle}\leqslant\sum_k c_{ki},\ c_{\triangle i}\leqslant\sum_k c_{ik}\qquad(i,j=1,2,\cdots)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\{\triangle,1,2,\cdots\}}c_{ij}&\leqslant\sum_{i,j}\rho_i p_{ij}+\sum_j c_{\triangle j}+\sum_i c_{i\triangle}\\
&\leqslant\sum_{i,j}\rho_i p_{ij}+\sum_j\sum_k c_{jk}+\sum_i\sum_k c_{ki}\\
&\leqslant 3\sum_{i,j}\rho_i p_{ij}=3<+\infty.
\end{aligned}$$

此外，

$$\sum_{i\in\{\triangle,1,2,\cdots\}}c_{ij}=c_{\triangle j}+\sum_i c_{ij}$$
$$=\sum_k c_{jk}-\sum_k c_{jk}\wedge\sum_k c_{kj}+\sum_k c_{kj}$$
$$=(\sum_k c_{jk}\vee\sum_k c_{kj}+\sum_k c_{jk}\wedge\sum_k c_{kj})-\sum_k c_{jk}\wedge\sum_k c_{kj}$$
$$=\sum_k c_{jk}\vee\sum_k c_{kj}=\sum_k c_{jk}\vee\sum_k c_{kj}-\sum_k c_{jk}+\sum_i c_{ji}$$
$$=c_{j\triangle}+\sum_i c_{ji}=\sum_{i\in\{\triangle,1,2,\cdots\}}c_{ji}$$

可见(c_{ij})中加入状态Δ后(即$i,j=\Delta,1,2,\cdots$)满足条件(c)，并且$\sum_{i,j\in\{\triangle,1,2,\cdots\}}c_{ij}<+\infty$，由定理5.1.2的系2，立刻得分解

$$c_{ij}=\sum_k r_{ij}^{(k)}+\sum_l g_{ij}^{(l)}\quad(i,j=\Delta,1,2,\cdots)$$

其中$(r_{ij}^{(k)})$是不经过Δ的环流矩阵，$(g_{ij}^{(l)})$是经过Δ的环流矩阵。因此

$$g_{ij}^{(l)}=\begin{cases}b_l & 当(i,j)\in\gamma^{(l)}\\ 0 & 其它\end{cases}$$

这里$\gamma^{(l)}$由$(g_{ij}^{(l)})$这个环流矩阵的路径$\Delta\to i_1^l\to i_2^l\to\cdots i_n^l\to\Delta$　决定：

$\gamma^{(l)}=\{(i_1^l,i_2^l),(i_2^l,i_3^l)\cdots,(i_{n_l-1},i_{n_l})\}$

由于$(g_{ij}^{(l)})$，$(r_{ij}^{(k)})$都只能在$c_{ij}\neq 0$时不为0，所以$(g_{ij}^l-g_{ji}^l)$，$(r_{ij}^{(k)}-r_{ji}^{(k)})$都与$c_{ij}-c_{ji}=\rho_i p_{ij}-\rho_j p_{ji}$是同号的。此即需证

定理5.5.2. 设有Q-过程$P(t)$，对任意一个分布$\{\rho_i\}$，对概率流速$(\rho_i q_{ij})$总可分解为

$$\rho_i q_{ij}=\rho_i q_{ij}^{(d)}+\sum_k r_{ij}^{(k)}+r_{ij}^{(\infty)}+\sum_l g_{ij}^{(l)}.$$

其中$(q_{ij}^{(d)})$，$(r_{ij}^{(k)})$，$(r_{ij}^{(\infty)})$都分别满足定理5.3.1中1)，2)，3)所述条件，而$(g_{ij}^{(l)})$满足定理5.6.1中3)所述条件。

证明　同时同定理5.3.1与定理5.5.1的做法，引入状态Δ，并将$\{n+1,\ n+2,\ \cdots\}$诸状态合成状态$(n+1)^*$，然后类似地就可得证此定理。

系：若Q矩阵有界，或$\sum_k\rho_i q_i<+\infty$，则$(r_{ij}^{(\infty)})=0$，若Q矩阵与ρ_i满足方程

$$\sum_i \rho_i q_{ij} = \sum_i \rho_j q_{ji} = 0 \text{（Q保守）}$$

则$(\sum_k g_{ij}^{(p)})=0$。特别当q_{ij}有界，保守，并且$\{\rho_i\}$是Q-过程的平稳分布，或$\sum_i \rho_i q_{ij}=0$且$\sum_i \rho_i q_i < +\infty$时，可有分解式：

$$\rho_i q_{ij} = \rho_i q_{ij}^{(d)} + \sum_k r_{ij}^{(k)}$$

其中 $\rho_i q_{ij}^{(d)} = \rho_i q_{ij} \wedge \rho_j q_{ji}$，$(r_{ij}^{(k)})$是环流矩阵。

§5.6. 熵产生率与环流、可逆性的关系

定义5.6.1. 设有马氏链以(q_{ij})为密度矩阵，$\{\rho_i(0)\}$为初分布，$\{\rho_i(t)\}$为时刻t时的分布：

$$\rho_i(t) = \sum_k \rho_k(0) p_{ij}(t)$$

令

$$S = -\sum_i \rho_i(t) \log \rho_i(t)$$

$$J_{ij} = \rho_i(t) q_{ij} - \rho_j(t) q_{ji}$$

$$A_{ij} = \log \frac{\rho_i(t) q_{ij}}{\rho_j(t) q_{ji}}$$

分别称S, J_{ij}，A_{ij}为熵，由i到j的流与由i到j的力。马氏链的熵产生率定义为：

$$P = \sum_{ij} J_{ij} A_{ij}.$$

定理5.6.1. 当马氏链可逆，则$P=0$；反之，对一个最小过程，如果它从某个初分布出发有恒为0的熵产生率，则该分布一定是平稳分布，并可逆，而且这时Q过程唯一。

证明 可逆P显然是0。反之，当$P=0$，即

$$P = \sum_{ij} J_{ij} A_{ij} = \sum_{ij} (\rho_i q_{ij} - \rho_j q_{ji}) \log \frac{\rho_i q_{ij}}{\rho_j q_{ji}}$$

$$= \sum_{ij} \left(\sum_k (r_{ij}^{(k)} - r_{ji}^{(k)}) \log \frac{\rho_i q_{ij}}{\rho_j q_{ji}} + (r_{ij}^{(\infty)} - r_{ji}^{(\infty)}) \log \frac{\rho_i q_{ij}}{\rho_j q_{ji}} \right.$$

$$+\sum_l (g_{ij}^{(l)}-g_{ji}^{(l)})\log\frac{\rho_i q_{ij}}{\rho_j q_{ji}} \qquad (5.6.1)$$

由于 $r_{ij}^{(k)}-r_{ji}^{(k)}, r_{ij}^{(\infty)}-r_{ji}^{(\infty)}, g_{ij}^{(l)}-g_{ji}^{(l)}$ 与 $\rho_i q_{ij}-\rho_j q_{ji}$同号，所以(5.6.1)中右边各项均非负，当$P=0$时，

$$\left| r_{ij}^{(k)}-r_{ji}^{(k)} \right|\left|\log\frac{\rho_i q_{ij}}{\rho_j q_{ji}}\right|,\quad \left| r_{ij}^{(\infty)}-r_{ji}^{(\infty)} \right|\left|\log\frac{\rho_i q_{ij}}{\rho_j q_{ji}}\right|$$

与 $\left|q_{ij}^{(l)}-q_{ji}^{(l)}\right|\left|\log\frac{\rho_i q_{ij}}{\rho_j q_{ji}}\right|$均为零。 如 $\rho_i q_{ij}=\rho_j q_{ji}$，

则$\rho_i q_{ij}=\rho_i q_{ij}^{(d)}$，所以$r_{ij}^{(k)}=r_{ji}^{(k)}=0$，$r_{ij}^{(\infty)}=r_{ji}^{(\infty)}=0$，$g_{ij}^{(\infty)}=g_{ji}^{(\infty)}=0$，否则$r_{ij}^{(k)}-r_{ji}^{(k)}=0$，$r_{ij}^{(\infty)}-r_{ji}^{(\infty)}=0$，$g_{ij}^{(l)}-g_{ji}^{(l)}=0$；由细致平衡定义，也就是$r_{ij}^{(k)}=r_{ji}^{(k)}=0$，$r_{ij}^{(\infty)}=r_{ji}^{(\infty)}=0$，$g_{ij}^{(l)}=g_{ji}^{(l)}=0$，因此$\rho_i q_{ij}=\rho_i q_{ij}^{(d)}=\rho_j q_{ji}^{(d)}$。对最小解$(p_{ij}^{min}(t))$，$\rho_i(t)$应满足*Master*方程(同前进方程)，即

$$\frac{d\rho_i}{dt}=\sum_k \rho_k q_{ki}=\sum_k \rho_i q_{ik}=0_\circ$$

所以$\rho_i(t)=\rho_i(0)$，因而

$$\rho_j(0)=\rho_j(t)=\sum_i \rho_i(0)p_{ij}^{min}(t)$$

也即$\{\rho_i(0)\}$是平稳分布，而且

$$1=\sum_j \rho_j(0)=\sum_i\sum_j \rho_i(0)p_{ij}^{min}(t)=\sum_i \rho_i(0)\sum_j p_{ij}^{min}(t)$$

由于$\sum_j p_{ij}^{min}(t)\leqslant 1$，$\sum_i \rho_i(0)=1$，可见

$$\sum_j p_{ij}^{min}(t)=1 \quad (i=1,2,\cdots). \qquad (5.6.2)$$

因此这时Q过程唯一，那么由最小过程可逆性条件(第二章 §2.5)，立刻得到$(p_{ij}^{min}(t))$配上初分布$\{\rho_i(0)\}$是可逆的。

§5.7. 环流分解与跳周率

本节引入环流配分的概念，并考查其均值(跳周率)，研究结果不仅表明了按跳周率的大小分配各环上的环流量，可以作一个环流分解，从而给环流分解提供一个明确的概率解释和物理意义；更为重要的是，正如序言中指出的，环流配分本身是一个具有重要物理意义的概念，它突出地反映了系统中自由能转换的过程. 本节最后研究了环流配分的渐近行为，也为计算跳周率提供了一个现实的计算方法.

为简单起见，本节着重对离散时间马氏链进行研究.

设$\{x_t(\omega)\}(t=0,1,2,\cdots\cdots)$. 是一个离散时间参数的马氏链，具有一步转移矩阵$(p_{ij})$，并且不可约，遍历，非周期(一般具有平稳分布的马氏链，对我们讨论的问题来说与这种情况没有实质性差别). 又设$t_n(\omega)$是$\{x_t(\omega)\}$的第n次跳跃时间$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

我们令

$$\tau_1(\omega)=\inf_n\{t_n(\omega)\,|\,\text{存在}m,\ 0\leqslant m<n\text{使}$$
$$x_{t_m(\omega)}(\omega)=x_{t_n(\omega)}(\omega)\}\qquad(5.7.1)$$

由链的遍历性知$\tau_1(\omega)<+\infty(\omega\in\Omega)$. 又若有$t_m(\omega)<\tau_1(\omega)$并使

$$x_{t_m(\omega)}(\omega)=x_{\tau_1(\omega)}(\omega)\qquad(5.7.2)$$

则令

$$\tau_1^*(\omega)=t_m(\omega).$$

注意：满足(5.7.2)的$t_m(\omega)$存在且唯一.

引理5.7.1. $\tau_1(\omega)$与$\tau_1^*(\omega)$具有性质：

1) $\tau_1^*(\omega)<\tau_1(\omega)$，并且$\tau_1$，$\tau_1^*$都是$x_t$的跳跃时间.

2) $\tau_1(\omega)$是关于$\{x_t(\omega)\}$的停时。

3) $\{\tau_1{}^*(\omega)\leqslant t\}\cap\{\tau_1(\omega)\leqslant s\}\in\mathfrak{M}_s=\{$由$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_s$生成的σ-代数$\}$（即$\tau_1{}^*$关于$\mathfrak{M}_{\tau_1}$可测）

证明 由定义，1)显然。现证2)。

$\{\tau_1(\omega)>t\}=\{\omega|$ 对一切$s_1<s_2\leqslant t$ $x_{s_1}(\omega)\neq x_{s_2}(\omega)\}\in\mathfrak{M}_t$，可见$\tau_1(\omega)$是停时。

下面证明3)。对$t\geqslant s$

$$\{\tau_1{}^*(\omega)\leqslant t\}\cap\{\tau_1(\omega)\leqslant s\}=\{\tau_1{}^*(\omega)<\tau_1(\omega)\leqslant s\leqslant t\}$$
$$=\{\tau_1(\omega)\leqslant s\}\in\mathfrak{M}_s,$$

另一方面，对 $t<s$

$\{\tau^*(\omega)\leqslant t,\tau_1(\omega)\leqslant s\}=\{\tau_1(\omega)\leqslant t\}\cup\{\tau^*(\omega)\leqslant t<\tau_1(\omega)\leqslant s\}$ 显然 $\{\tau_1(\omega)\leqslant t\}\in\mathfrak{M}_t\subset\mathfrak{M}_s$，此外

$$\{\tau_1{}^*(\omega)\leqslant t<\tau_1(\omega)\leqslant s\}$$
$$=\{\omega|\text{对一切满足}s\geqslant\tau_1(\omega)>t'>t\text{的}t',\text{都有}x_{t'}(\omega)\neq x_{\tau_1}(\omega)\}$$
$$=\bigcap_{s\geqslant t'>t}[(\{\omega|s\geqslant\tau_1(\omega)>t'\}\cap\{\omega|x_{t'}(\omega)\neq x_{\tau_1}(\omega)\})\cup$$
$$\{\omega|t'\in[\tau_1, s]\}]\in\mathfrak{M}_s,$$

所以 $\{\tau_1{}^*(\omega)\leqslant t\}\cap\{\tau_1(\omega)\leqslant s\}\in\mathfrak{M}_s$。

我们再令

$$x_t^{(1)}(\omega)=\begin{cases}x_t(\omega) & \text{若}\quad t<\tau_1{}^*(\omega)\\ x_{\tau_1}(\omega)=x_{\tau_1{}^*}(\omega) & \text{若}\quad \tau_1{}^*(\omega)\leqslant t<\tau_1(\omega)\\ x_t(\omega) & \text{若}\quad t\geqslant\tau_1(\omega)\end{cases}\tag{5.7.3}$$

又设 $t_n^{(1)}(\omega)$是 $x_t^{(1)}(\omega)$ 的第n次跳跃时间$(n=1, 2, \cdots)$，它们是$\{t_1(\omega),\cdots, t_n(\omega),\cdots\}$的一部分。我们称ω在$\tau_1{}^*(\omega)$到$\tau_1(\omega)$这段时间在环：$x_{\tau_1{}^*}(\omega)\to x_{\tau_1{}^*+1}(\omega)\to\cdots\to x_{\tau_1}(\omega)$上。

类似地，我们可以令

$\tau_2(\omega)=\inf\{t_n^{(1)}(\omega)|x^{(1)}_{t_n^{(1)}(\omega)}(\omega)=x^{(1)}_{t_m^{(1)}(\omega)}(\omega)$，存在$m_1$

$0\leqslant m<n\}$

$$\tau_2^*(\omega)=t_m^{(1)}(\omega)\ （如有\ t_m^{(1)}(\omega)<\tau_2(\omega)\ 使\ x_{t_m^{(1)}(\omega)}(\omega)=x_{\tau_2(\omega)}(\omega)）$$

重复上面步骤，我们可以得到 $\tau_1(\omega)<\tau_2(\omega)<\cdots<\tau_n(\omega)<\cdots$，$\tau_1^*(\omega),\tau_2^*(\omega),\cdots,\tau_n^*(\omega),\cdots$；与 $x_t^{(1)}(\omega),x_t^{(2)}(\omega),\cdots,x_t^{(n)}(\omega),\cdots$。

并且我们有：

$$x_{\tau_n(\omega)}^{(n-1)}(\omega)=x_{\tau_n^*(\omega)}^{(n-1)}(\omega)。$$

并称在 $[\tau_n^*,\tau_n]\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}(\tau_k^*,\tau_k)$ 这段时间中轨道 ω 走在环 $x_{\tau_n^*(\omega)}^{(n-1)}(\omega)\to x_{\tau_n^*(\omega)+1}^{(n-1)}(\omega)\to\cdots\to x_{\tau_n(\omega)}^{(n-1)}(\omega)$ 上。

我们用 $\{i_1\to i_2\to i_3\to\cdots\to i_s\}$ 表示状态 i_1，i_2，$\cdots i_s$ 组成的有向状态集合，并用 $\overrightarrow{\bigcup}$ 表示有向状态集的有向并，定义为

$$\overrightarrow{\bigcup_{1\leqslant l\leqslant s}}\{i_l\}\triangleq\{i_1\to i_2\to i_3\cdots\to i_s\} \tag{5.7.4}$$

以及

$$\{i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\}\overrightarrow{\bigcup}\{i_{s+1}\to\cdots\to i_{s+k}\}$$
$$\triangleq\{i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\to i_{s+1}\to\cdots\to i_{s+k}\}$$

令

$$y_0(\omega)=\{x_0(\omega)\}$$

$$y_1(\omega)=\{x_0(\omega)\to x_1(\omega)\}$$

$$y_t(\omega)=\{x_0(\omega)\to\cdots\to x_t(\omega)\}=\overrightarrow{\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t}}\{x_s(\omega)\}\quad 当t<\tau_1(\omega)$$

$$y_{\tau_1}(\omega)=\overrightarrow{\bigcup_{\substack{0\leqslant s\leqslant\tau_1(\omega)\\ s\bar{\in}(\tau_1^*,\tau_1)}}}\{x_s(\omega)\}\qquad 当t=\tau_1(\omega) \tag{5.7.5}$$

$$y_{\tau_n(\omega)}(\omega)=\overrightarrow{\bigcup_{\substack{0\leqslant s\leqslant\tau_n(\omega)\\ s\bar{\in}(\tau_k,\tau_k^*)\\ k=1,2,\cdots,n}}}\{x_s(\omega)\}\qquad 当t=\tau_n(\omega)$$

$$y_t(\omega)=y_{\tau_n(\omega)}(\omega)\overrightarrow{\bigcup}\Big(\bigcup_{\tau_n<s<t}\{x_s(\omega)\}\Big)\ \text{当}\tau_n<t<\tau_{n+1}$$

我们称$\{y_t(\omega)\}$为$\{x_t(\omega)\}$的环流余量链。

注意：若 $y_t(\omega)=\{j_1\to j_2\to\cdots\to j_r\}$，则$x_t(\omega)=j_r$。

引理 5.7.2. $\{y_t(\omega)\}$是一个马氏链。当$\{x_t(\omega)\}$的转移矩阵(p_{ij})所包含的环流矩阵的全体为

$$R=\{R^1,\ R^2,\ \cdots,\ R^n,\ \cdots\}$$

又设(R^n_{ij})中非零元素的个数为m_n，而且

$$m_n<n_0<+\infty$$

那么$\{y_t(\omega)\}$是一个可数状态马氏链，将它的全部状态排好，记为$\{E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n,\ \cdots\}$。

E_n一定是形如：$\{i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\}$的有向状态集，并且其中不包含环。

设 $E_j=\{j_1\to j_2\to\cdots\to j_r\}$， $E_i=\{i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\}$。

令 $\widetilde{p}_{E_iE_j}=P(y_{n+1}=E_j\,|\,y_n=E_i)$（这时$x_{n+1}=i_{s+1}=j_r$）

则有：

$$\widetilde{p}_{E_iE_j}=\begin{cases}p_{i_sj_r} & \text{当}\quad r=s+1,\ j_1=i_1,\ \cdots,\ j_s=i_s,\\ p_{i_sj_r} & \text{当}\quad r=k_0<s,\ j_1=i_1,\ \cdots,\ j_{k_0}=i_{k_0},\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

证明 y_n与y_{n+1}取值只有两种可能情况：

1) 当$y_n=E_i=\{i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\}$，$x_{n+1}=i_{s+1}$且$\{i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\to i_{s+1}\}$不含一个环时，那么这时，$y_{n+1}=\{i_1\to i_2\to\cdots\to i_{s+1}\}=E_j$

$$\begin{aligned}&P(y_{n+1}=E_j\,|\,y_n=E_i,\ y_{n-1}\in B,\ \cdots)\\&=P(y_{n+1}=E_j,\ x_{n+1}=i_{s+1}\,|\,y_n=E_i,\ x_n=i_s,\ y_{n-1}\in B,\ \cdots)\end{aligned}$$

容易看出，$\{y_{n-1}\in B, \cdots\}\in\mathfrak{M}_{n-1}$，所以上式应等于

$$P(y_{n+1}=E_j, x_{n+1}=i_{s+1}|x_n=i_s, y_n=E_i, y_{n-1}\in B, \cdots)$$
$$=P(x_{n+1}=i_{s+1}|x_n=i_s, y_n=E_i, y_{n-1}\in B, \cdots)$$
$$=P(x_{n+1}=i_{s+1}|x_n=i_s)=p_{i_s i_{s+1}}=p_{i_s j_r}.$$

（当$i_{s+1}=i_s$时，$y_{n+1}=y_n$）

2) 当 $y_n=E_i$，$x_{n+1}=i_{k_0}$ $(k_0<s)$，也即 $\{i_1\to\cdots\to i_{k_0}\to\cdots\to i_s\to i_{s+1}\}$ 中含有环$\{i_{k_0}\to\cdots\to i_s\to i_{s+1}\}$时，那么这时必有$y_{n+1}=\{i_1\to\cdots\to i_{k_0}\}=E_j$：

$$P(y_{n+1}=E_j|y_n=E_i, y_{n-1}\in B, \cdots)$$
$$=P(y_{n+1}=E_j, x_{n+1}=i_{k_0}|y_n=E_i, x_n=i_s, y_{n-1}\in B, \cdots)$$
$$=P(x_{n+1}=i_{k_0}|x_n=i_s, y_n=E_i, y_{n-1}\in B, \cdots)$$
$$=P(x_{n+1}=i_{k_0}|x_n=i_s)=p_{i_s i_{k_0}}=p_{i_s j_r}.$$

其他情况都不可能，故这时 $p_{E_i E_j}=0$。

引理得证。

再令

$$Z_n^k(\omega)\triangleq\begin{cases}1 & \text{当 } y_{n-1}\overrightarrow{\bigcup}\{x_n\}=y_n\overrightarrow{\bigcup}\{R^{(k)}\}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\qquad(5.7.6)$$

（其中$R^{(k)}$是(p_{ij}) 所含的一个环流矩阵对应的环。） 那么轨道ω在$[0,N]$这段时间内绕$R^{(k)}$的次数应为

$$W_N^{(k)}(\omega)\triangleq\sum_{n=1}^N Z_n^k(\omega)$$

平均每步轨道ω在 $R^{(k)}$上的次数为$\frac{1}{N}W_N^{(k)}(\omega)$，记为

$$J_N^{(k)}(\omega)=\frac{1}{N}W_N^{(k)}(\omega)\qquad(5.7.7)$$

我们称$\{J_N^{(k)}(\omega)|k=1,2,\cdots\}$为$N$步环流配分。

引理5.7.3. 当$\{y_t(\omega)\}$是一个可数状态马氏链，状态空间为：$E=\{E_1, E_2, \cdots\}$，若记$P(y_t(\omega)=E_i)$为$\widetilde{\rho}_{E_i}(t)$。

1) $\widetilde{\rho}_{E_i}(0)=P(y_0(\omega)=E_i)=\begin{cases}P(x_0(\omega)=i) & 当\ E_i=\{i\} \\ 0 & 其它\end{cases}$

2) 存在极限

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_{E_i}(n)=\widetilde{\mu}_{E_i}. \tag{5.7.8}$$

证明 由于对马氏链$\{y_t(\omega)\}$的转移概率应有：

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\widetilde{p}_{E_iE_j}(n)\xrightarrow{N\to+\infty}f(E_i, c)v_{E_j}$$

$f(E_i, c)$为从E_i出发到达E_j所在类的概率。 当$E_i=\{i\}$由$\{x_t(\omega)\}$常返，而当$x_t(\omega)=x_0(\omega)$时，$y_t(\omega)=\{x_0(\omega)\}$ 所以如果$E_j=\{i\to\cdots\to i_s\}$ (从i为第一个状态)$f(\{i\}, c)=1$，当$E_j=\{i_0\to\cdots\to i_s\}$而$i_0\neq i$，则$\{i\}$永远不能到$E_j$及其所在类，所以$f(\{i\}, c)=0$。

另一方面由引理5.7.3.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_{E_i}(n)=\sum_{E_j}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_{E_j}(0)p_{E_jE_i}(n)$$

$$=\sum_{E_j}\rho_{E_j}(0)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}p_{E_jE_i}(n)$$

$$=\sum_{E_j=\{j\}}p(x_0(\omega)=j)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}p_{E_jE_i}(n)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{控制收敛}\sum_{E_j=\{j\}}u_jf(E_j, c)v_{E_i}$$

$$= u_i v_{E_i} \quad \left(\begin{array}{l}\text{设} E_i = \{i \to \cdots \to i_s\} \\ \text{即} E_i \text{的第一个状态是} i\end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{\text{记为}}}\ \widetilde{\mu}_{E_i}.$$

定义5.7.4. （跳周率）如果存在极限

$$\lim_{N \to +\infty} E J_N^{(k)}(\omega) \tag{5.7.9}$$

则称之为$\{x_t(\omega)\}$在环$R^{(k)}$上的跳周率，记为J_k。

定理5.7.1. （环流配分定律）对有限状态（设为n_0个状态）的马氏链存在极限

$$\lim_{N \to +\infty} E(J_N^{(k)}(\omega)) = J_k, \tag{5.7.10}$$

而且

$$\sum_k J_k R_{ij}^{(k)} = u_i p_{ij}.$$

定理的结果表明，用J_k作$R^{(k)}$上的环流量，可形成$(u_i p_{ij})$的一个环流分解。

证明 由引理5.7.3，

$$\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{N} \widetilde{\rho}_{E_i}(n) \xrightarrow{N \to +\infty} \widetilde{\mu}_{E_i}$$

则

$$E(J_N^k(\omega)) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E(Z_n^{(k)}(\omega))$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(Z_n^{(k)}(\omega) = 1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(y_{n-1}^{(\omega)} \overrightarrow{\bigcup} \{x_n^{(\omega)}\} = y_n \overrightarrow{\bigcup} R^{(k)})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{E_i} \widetilde{\rho}_{E_i}(n) \widetilde{p}_{E_i \widetilde{E}_i}(1).$$

（这里$\widetilde{E}_i$依赖于E_i，满足$\widetilde{E}_i \overrightarrow{\bigcup} R^{(k)} = E_i \overrightarrow{\bigcup} \{i\}$，$\{i\}$是$R^{(k)}$与$\widetilde{E}_i$连结的最后一个状态）

上式 $\xrightarrow[\text{控制收敛}]{N\to+\infty} \sum_{E_i}\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\widetilde{\rho}_{E_i}(n)\right)\widetilde{p}_{E_i\widetilde{E}_i}(1)$

$$=\sum_{E_i}\widetilde{\mu}_{E_i}\widetilde{p}_{E_i\widetilde{E}_i}(1)\xlongequal{\text{记为}}J_k \qquad (5.7.11)$$

因此，由控制收敛定理得

$$\sum_k J_k R_{ij}^{(k)}=\lim_{N\to+\infty}\sum_k E\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}R_{ij}^{(k)}Z_n^{(k)}(\omega)\right)$$

又若令

$$_nS_{ij}^k(\omega)=\begin{cases}1 & \text{第 } n \text{ 次步 } x_{n-1}(\omega)=i,\ x_n(\omega)=j \\ & \text{而且走在第 } k \text{ 个环 } R^{(k)} \text{ 上，} \\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

$$\sum_k {}_nS_{ij}^{(k)}(\omega)=\begin{cases}0 & \text{当 } x_{n-1}(\omega)=i,\ x_n(\omega)=j \text{ 且在某环上，} \\ 1 & \text{其它。}\end{cases}$$

那末 $\left|\sum_{n=1}^{N}{}_nS_{ij}^{(k)}(\omega)-\sum_{n=1}^{N}R_{ij}^{(k)}Z_n^{(k)}(\omega)\right|<n_0$

这是因为在同一个环上的各时间中有

$$\sum_{t\in[\tau_n^*,\ \tau_n]\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}(\tau_{n-1}^*,\ \tau_n)}\left({}_nS_{ij}^{(k)}(\omega)-Z_n^{(k)}(\omega)R_{ij}^{(k)}\right)=0$$

而在[0, N]上，不属于某一次形成的环的时间至多只有n_0-1之故。于是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}E\left(\sum_k R_{ij}^{(k)}Z_n^{(k)}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}E\left(\sum_k {}_nS_{ij}^{(k)}(\omega)\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}1\cdot u_i p_{ij}=u_i p_{ij}.$$

即有

$$\sum_k J_k R_{ij}^{(k)}=u_i p_{ij}.$$

定理证完。

系1 设有马氏链，它的一步转移矩阵为

$$(p_{ij}(1))=\begin{pmatrix} 1-\frac{a}{u_1} & \frac{a}{u_1} & & & \\ & 1-\frac{a}{u_2} & \frac{a}{u_2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{a}{u_{n-1}} \\ \frac{a}{u_n} & & & & 1-\frac{a}{u_n} \end{pmatrix}$$

(这种马氏链称之为单环流马氏链)，则它沿环R，$1\to2\to\cdots\to n\to1$的跳周率应为a。

证明 (p_{ij})只包含一个环R，$1\to2\to\cdots\to n\to1$，它对应的环流矩阵是

$$(R_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

所以由定理5.7.1.

$$u_i p_{ij}=J\,R_{ij}$$

考虑$j=i+1$的特殊情况，立刻看出

$$J=u_i p_{ij+1}=u_i\cdot\frac{a}{u_i}=a_{\circ}$$

对有限状态马氏链，注意到(5.7.7)式中的极限可以用图论的方法求得，可见由(5.7.10)中结果，可以用图论的方法求得J_k，它与Hill在〔7〕中求环流量的方法是一致的。

定义5.7.5. 若有连续参数马链氏 $x_t(\omega)$，又有一环流矩阵 $R=(R_{ij})$ 它包含在 $X_t(\omega)$ 的转移矩阵 (p_{ij}) 中，即

$$(R_{ij}) \prec (p_{ij}) \quad (\text{见定义}5.2.1)$$

令：

$$x_n^\delta(\omega) = x_{n\delta}(\omega)$$

又设 $J_\delta^{(R)}$ 是 $x_n^\delta(\omega)$ 沿 R 的跳周率，则

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} J_\delta^{(R)}$$

称为 $X_t(\omega)$ 沿 R 的跳周率，记为 J^R。

又若含于 (p_{ij}) 中的全体环流矩阵为 $R^{(1)}, \cdots, R^{(n)}, \cdots$ 则在一些普通的条件下：

$$\sum_{R_k \in R} J^{(R_k)} R_{ij}^{(k)} = u_i q_{ij}.$$

关于环流配分与环流还有许多有趣的问题有待进一步讨论，例如环流配分的强极限问题，两个马氏链的相互作用，环流余量马氏链的更细致的性质，等等。

参 考 文 献

〔1〕 Qian Min-ping (钱敏平) The decomposition of a stationary Markov Chain into a detailed balanced part and a circulation part. Scientia Sinica (中国科学) 1979 数学增刊
〔2〕 钱敏平 马氏链的可逆性，北京大学学报 1978 年第4期。
〔3〕 侯振挺 郭青峰 齐次可列马尔可夫过程（科学出版社）
〔4〕 T. L. Hill J.Theoret. Biol. 10.442 (1966).
〔5〕 T. L. Hill Free Energy Transduction in Biology Academic Press, London. 1977

第六章　马尔可夫过程与场论

侯振挺　　陈木法

（长沙铁道学院）（北京师范大学）

自从发现了物理学中的古典位势理论与马尔可夫过程的某些课题有十分密切的联系以来，马尔可夫过程理论的研究出现了新的面貌，并有了很大发展.这一发现，不仅使马尔可夫过程理论受益，而且也给位势理论的研究提供了新的途径.两者相互渗透、交错发展.最近，我们在马尔可夫过程中发现了古典场论的某些类似物（在本书的第一章已初步注意到这一点）.这样一来，我们就能够把场论中的某些研究方法和结果移植到马尔可夫过程中去.沿此，我们引入了抽象“场”的概念.进而，找到了场成为势场的充要条件、势场的“势”及势的概率意义；我们从场的观点出发，详细地研究了马尔可夫链、马尔可夫过程、二元组及N元组随机徘徊、Q矩阵和Q过程的有势性、可配称性和可逆性问题.给出了有效的判别准则和一系列充要条件.这些研究还表明："势场"这一概念更为本质，它更为清楚地刻划了“可逆性”的本质特征.

为了把问题阐述清楚，让我们先从古典场论谈起.

§6.1.　古典场论

设G为空间中的一个区域.如果对于任一点$P(x, y, z)\in G$，有矢量

$$\vec{a}(x,y,z;t)=a_x(x,y,z;t)\vec{i}+a_y(x,y,z;t)\vec{j}$$

$$+a_z(x,y,z;t)\vec{k} \qquad (6.1.1)$$

与之对应，这时，我们说在G上定义了一个(矢量)场$(G,\ \vec{a}(t))$，其中$a_x(x,y,z;t)$，$a_y(x,y,z;t)$和$a_z(x,y,z;t)$是定义在G上的单值连续函数，并且有连续的偏导数。

如果存在一个数量函数$u(x,y,z;t)$，使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=a_y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=a_z \qquad (6.1.2)$$

则称$(G,\ \vec{a}(t),\ u(t))$为一个势场，并称$u(x,y,z;t)$为场$(G,\ \vec{a}(t))$(或$\vec{a}(t)$)的势。如果势函数$u(x,y,z;t)$不含t，则称$(G,\vec{a}(t))$为保守场。

周知，若G为单连通域，则场$(G,\ \vec{a}(t))$有势的充要条件是场$(G,\ \vec{a}(t))$沿G内的任一闭回路L所作的功为零。即

$$\oint_L a_x(x,y,z;t)dx+a_y(x,y,z;t)dy+a_z(x,y,z;t)dz=0$$

$$\forall t\geqslant 0. \qquad (6.1.3)$$

§6.2. 场与势场

设E是任一至多可列集，T是任一指标集(有限、可列或$[0,\infty)$等等)。又设$a(t)=\{a_{ij}(t),\ i,\ j\in E\}$是给定的一族定义在$T$上的实函数，满足如下基本假设：

(1) $a(t)$的非对角线元素$a_{ij}(t)(i\neq j)$非负，但对角线元素任意；

(2) “零间”性：

$a_{ij}(t)>0 \Longleftrightarrow a_{ji}(t)>0, \ \forall t \in T, \ \forall i, \ j \in E$ (6.2.1)

以后所用到各种形式的$a(t)$(或a)均满足以上假设，不再随处申明。

定义6.2.1. 如果$a_{ij}(t)>0$，我们就说在时刻t，i直达j，并记作$i \to j$。我们把$i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{n+1}$叫做$a(t)$在时刻$t$的一条（$n$节）路，记作$L(t)=(i_1, i_2, \cdots, i_{n+1})$。并称$i_k \to i_{k+1}(1 \leqslant k \leqslant n)$为$L(t)$的一节．此时称在$t$时刻$i_1$可达$i_{n+1}$，并记作$i_1 \frown\!\!\smile i_{n+1}$。(虽然在这里我们没有明确写出$t$，但要记住路总是依赖于$t$的)。

$a(t)$在时刻t的一切路的全体，记作$\mathscr{L}(t)$。

如果在时刻t，$i \to j$，我们就命

$$\varphi_{ij}(t)=\log a_{ji}(t)-\log a_{ij}(t). \tag{6.2.2}$$

无妨记$\varphi(t)=(\varphi_{ij}(t))$。其中当在时刻$t$，$i$不直达$j$时，$\varphi_{ij}(t)$是不定元(我们不加定义)。

为了研究马尔可夫过程的需要，现在我们模仿本章§1中所谈的古典场，而引入“抽象”场及有关的概念．

视E为本章§6.1中的区域G；视E中的任一元i为G中的点$P(x,y,z)$；视无穷维矢量$(\varphi_{ij}(t);\ j \in E)$为矢量$(a_x(x,y,z;t),\ a_y(x,y,z;t),\ a_z(x,y,z;t))$，等等。

定义6.2.2. 称$(E,a(t),\varphi(t))$(或$a(t)$)为场；称$\mathscr{L}(t)$的元素为场$a(t)$的路；$\varphi(t)$称为场$a(t)$的场强；若i在时刻t直达j，则称$\varphi_{ij}(t)$为场强$\varphi(t)$在时刻t从i到j的分量。

为了描述场作“功”及势场的概念，下面我们默认E中任意两个直达元素之间的距离为1。因此，场$(E,\ a(t))$沿路$L(t)=(i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1})$所作的“功”可理解成

$$\varphi(L(t))=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{i_k i_{k+1}}(t) \tag{6.2.3}$$

而相应于(6.1.2)的应是

$$u_j(t)-u_i(t)=\varphi_{ij}(t),\ \text{如果在时刻} t\in T,\ i\to j,\ i,\ j\in E.$$

由此引进：

定义6.2.3. 如果存在函数族$u(t)=\{u_i(t);\ i\in E\}(t\in T)$使得

$$u_j(t)-u_i(t)=\varphi_{ij}(t). \text{如果在时刻} t\in T, i\to j, i, j\in E \quad (6.2.4)$$

成立，则称 $(E,\ a(t),\ u(t))$ （或$a(t)$）为势场，并称$u(t)$为$a(t)$的势。

显然有

定理6.2.1. 如果$(u_i(t))$和$(v_i(t))$是$a(t)$的势，$w(t)$ 是T上的任一实函数，则

(1) $(u_i(t)+w(t))$也是$a(t)$的势；

(2) $(w(t)u_i(t)+(1-w(t)v_i(t))$也是$a(t)$的势。

§6.3. 有 势 场

本节研究场$(E,a(t))$成为势场的充要条件．同时也给出了势场的各种性质。

定义6.3.1. 称$a(t)$在时刻$t\in T$是不可约的，如果在时刻$t\in T$，对于一切$i,\ j\in E,\ i\neq j$有i可达j。否则称为可约的。

定义6.3.2. 称$a(t)$是路径无关的，如果对于每个时刻t的每一条闭合回路$L(t)=(i,\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n,\ i)$有

$$\varphi(L(t))=0. \qquad (6.3.1)$$

定理6.3.1. 场$(E,\ a(t))$有势的充要条件是，它是路径无关的。

证明 必要性：

设$a(t)$有势$(u_i(t))$。$L(t)$为任一闭合回路

$L(t)$: $i=i_1\to i_2\to\cdots\to i_n\to i_{n+1}=i$，那么

$$\varphi(L(t))=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{i_k i_{k+1}}(t)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u_{i_{k+1}}(t)-u_{i_k}(t)]$$

$$=u_{i_{n+1}}(t)-u_{i_1}(t)=0 \qquad (6.3.2)$$

从而$a(t)$路径无关。反之，设$a(t)$路径无关，我们只需对每一个$t\in T$，求出$(u_i(t))$。以下固定$t\in T$。先设$a(t)$不可约，任取$i_0\in E$，命

$$u_{i_0}(t)\equiv 0,\ \forall t\in T \qquad (6.3.3)$$

对于$\forall i\in E$，任意选取一条从i_0到i的路

$$i_0\to i_1\to\cdots\to i_n\to i_{n+1}=i \qquad (6.3.4)$$

并命

$$u_i(t)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_{i_k i_{k+1}}(t) \qquad (6.3.5)$$

由路径无关性知(6.3.5)式有意义。现在，对于一切$i,j\in E$，如$i\to j$，就有

$$u_j(t)-u_i(t)=\sum_{l=0}^{m}\varphi_{j_l j_{l+1}}(t)-\sum_{k=1}^{n}\varphi_{i_k i_{k+1}}(t)$$

$$=\varphi_{ij}(t) \qquad (6.3.6)$$

其中

$$j_0=i_0\to j_1\to j_2\to\cdots\to j_{m+1}=j \qquad (6.3.7)$$

为如上选定的从i_0到j的一条路。

如果$a(t)$是可约的，由于$a(t)$是零间的，所以我们可将它分成若干个不可约部分，对每一部分分别用上述办法求出$u_i(t)$，合并起来便构成$a(t)$的一个势。定理证毕。

下面介绍本章将要反复使用的若干约定和记号。

对于固定的$t\in T$，因为$a(t)$是零同的，故我们可将E分割成有限个或可列个不交集$E_l(t)(l\in D(t))$之并。使得或者$E_l(t)$是单点集（即$E_l(t)=\{i\}$，$\forall j\in E$，$j\neq i$，有$a_{ij}(t)=0$）；或者$(E, a(t))$限于$E_l(t)$是不可约的（即$i, j\in E_l(t)\Rightarrow i\sim j$）。对于每一个$l\in D(t)$，任意取定一个元素$\Delta_l\in E_l(t)$，对于每一个$i\in E_l(t)$，$i\neq\Delta_l$，任意取定（$E_l(t)$中的）一条路

$$L_l(t):\ \Delta_l\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_k\to i; \tag{6.3.8}$$

记

$$\hat{a}_{\Delta_l i}(t)=a_{\Delta_l i_1}(t)a_{i_1 i_2}(t)\cdots a_{i_k i}(t); \tag{6.3.9}$$

$$\hat{a}_{i\Delta_l}(t)=a_{i i_k}(t)a_{i_k i_{k-1}}(t)\cdots a_{i_1\Delta_l}(t); \tag{6.3.10}$$

$$v_i(t)=\begin{cases}1, & \text{如果} i=\Delta_l; \\ \dfrac{\hat{a}_{\Delta_l i}(t)}{\hat{a}_{i\Delta_l}(t)}, & \text{如果} i\neq\Delta_l\end{cases} \tag{6.3.11}$$

$$\varphi(i,\ \Delta_l;\ t)=\varphi(L_l(t)). \tag{6.3.12}$$

请注意，以后我们将对于各种形式的$(a_{ij}(t))$使用这些约定和记号，但我们并不再一一申明。

下述定理是$a(t)$路径无关的判别准则。

定理6.3.2. $a(t)$路径无关的充要条件是

$$\hat{a}_{\Delta_l i}(t)a_{ij}(t)\hat{a}_{j\Delta_l}(t)=\hat{a}_{\Delta_l j}(t)a_{ji}(t)\hat{a}_{i\Delta_l}(t)$$

$$\forall i,\ j\in E_l(t),\ \forall l\in D(t),\ \forall t\in T. \tag{6.3.13}$$

成立[*]。其中Δ_l和$L_l(t)$是如上预先选定的。

这个定理表明，条件(6.3.13)对于每一组$(\Delta_l, L_l(t); l\in D(t))$

---

[*] 与此无妨约定 $\hat{a}_{\Delta_l\Delta_l}(t)=1$ $(\forall l\in D)$。以下类同。

同时成立或同时不成立(当t固定)。即定理的结论不依赖于$(\Delta_l, L_l(t);\ l\in D(t))$的选法。

证明 必要性：无妨设$i\to j$(否则(6.3.13)自然成立)，此时，条件(6.3.13)等价于

$$\varphi(\Delta_l,\ j;\ t)=\varphi(\Delta_l,\ i;\ t)+\varphi_{ij}(t) \qquad (6.3.14)$$

但由假设$a(t)$路径无关，故(6.3.14)显然成立。

充分性：设

$$L(t):\ i=j_0\to j_1\to\cdots\to j_n\to j_{n+1}=j \qquad (6.3.15)$$

是$E_l(t)$中的从i到j的任一条路，则由(6.3.13)知，对于每一节路(6.3.14)成立。于是

$$\begin{aligned}\varphi(L(t))&=\sum_{s=0}^{n}\varphi_{j_s j_{s+1}}(t)\\&=\sum_{s=0}^{n}[\varphi(\Delta_l,\ j_{s+1};\ t)-\varphi(\Delta_l,\ j_s;\ t)]\\&=\varphi(\Delta_l,\ j;\ t)-\varphi(\Delta_l,\ i;\ t)\end{aligned} \qquad (6.3.16)$$

与$L(t)$的选择无关。故$a(t)$是路径无关的。

定义6.3.3. 称$a(t)$是弱可配称的，如果存在T上的函数族$V(t)=(v_i(t);\ i\in E)$，使得

$$v_i(t)>0,\ \forall t\in T,\ \forall i\in E. \qquad (6.3.17)$$

$$v_i(t)a_{ij}(t)=v_j(t)a_{ji}(t),\ \forall t\in T,\ \forall i,\ j\in E. \qquad (6.3.18)$$

此时称$V(t)$为$a(t)$的配称(函数)列。

定理6.3.3. $a(t)$弱可配称的充要条件是，它是路径无关的。

证明 必要性：设$a(t)$有配称列$\widetilde{V}(t)=(\widetilde{v}_i(t))$。又设

$$L(t):\ i=j_0\to j_1\to\cdots\to j_n\to j_{n+1}=j$$

是在时刻t从i到j的任一条路，则

$$\begin{aligned}\varphi(L(t)) &= \sum_{s=0}^{n}\varphi_{j_s j_{s+1}}(t) \\ &= \sum_{s=0}^{n}(\log a_{j_{s+1}j_s}(t)-\log a_{j_s j_{s+1}}(t)) \\ &= \sum_{s=0}^{n}(\log\widetilde{v}_{j_s}(t)-\log\widetilde{v}_{j_{s+1}}(t)) \\ &= \log\widetilde{V}_i(t)-\log\widetilde{V}_j(t) \qquad (6.3.19)\end{aligned}$$

不依赖于$L(t)$的选择。故$a(t)$路径无关。

充分性：由(6.3.11)和(6.3.13)知$(v_i(t))$是$a(t)$的一个配称列。证毕。

综合以上各条定理，我们得到：

定理6.3.4. 关于场$a(t)$，下述断言等价。

(i) $a(t)$有势；

(ii) $a(t)$路径无关；

(iii) $a(t)$弱可配称；

(iv) 条件(6.3.13)成立。

特别，我们有

定理6.3.5. 如果场$a(t)$在时刻t，E中任何两个元素i和j之间至多存在一条这样的路$L(t)=(i, i_1, i_2, \cdots, i_n, j)$，诸$i, i_1, i_2, \cdots, i_n, j$互不相同，则定理6.3.4中的(i)——(iv)都成立。

定义6.3.4. 称势场$a(t)$是保守场，如果它存在一个与t无关的势函数；而这种势函数称为保守势函数。

定理6.3.6. 如果$a(t)$的路$\mathscr{L}(t)$与t无关，并且它有保守势，则它的一切保守势可如下表出：

$$u_i=u_i(t_0)+c_l,\ i\in E_l,\ l\in D \qquad (6.3.20)$$

其中

$$u_l(t_0)=-\log v_l(t_0),\ l\in E_l,\ l\in D \qquad (6.3.21)$$

$c_l(l\in D)$是任意常数，t_0是T中的任意选定的元素。

证明 在定理假设条件下，(u_i)为$a(t)$的保守势的充要条件是：只要$i\to j$，就有

$$u_j-u_i=\varphi_{ij}(t)\quad \forall t\in T \qquad (6.3.22)$$

我们已有一个保守势，故上述条件又等价于

$$u_j-u_i=\varphi_{ij}(t_0)\quad 对某个t_0\in T成立。 \qquad (6.3.23)$$

假定在$t_0\in T$，$i\to j$且i，$j\in E_l(t_0)$，则还有

$$\begin{aligned}u_j(t_0)-u_i(t_0)&=\log v_i(t_0)-\log v_j(t_0)\\&=\varphi(\Delta_l,\ j;\ t_0)-\varphi(\Delta_l,\ i;\ t_0)\\&=\varphi_{ij}(t_0)\quad (i,j\in E_l(t_0))。\end{aligned} \qquad (6.3.24)$$

由(6.3.23)和(6.3.24)知道(6.3.20)给出保守势。在(6.3.24)中取$j=\Delta_l$便知每一保守势形如(6.3.20)。定理证毕。

容易证明，一个势场的势与配称列有如下关系。

定理6.3.7. 如果$(u_i(t))$是$a(t)=(a_{ij}(t))$的势，则$(e^{-u_i(t)})$是$a(t)$的配称列；反之，如果$(v_i(t))$是$a(t)$的配称列，则$(-\log v_i(t))$是$a(t)$的势。

§6.4. 二维格子点场

在本章§6.3中，我们已经找到了一个场成为势场的充要条件。在本节及下一节中，我们将对格子点场找出更为简洁的条件。本节的结果是下一节结果的特例，但由于它本身的重要性，我们还是单独抽出一节加以讨论。

取

$$E_1=(0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{6.4.1}$$

$$E_2=E_1\times E_1 \tag{6.4.2}$$

并用$(i,\ j)$，$(k,\ l)$或e，e'表E_2中的点。

定义6.4.1. 场 $a=(a(i,\ j;\ k,\ l),\ (i,\ j),\ (k,\ l)\in E_2)$称为(狭义)二维格子点场，如果它满足条件：

$$a(i,\ j;\ k,\ l)>0,\ \forall(k,\ l)\in F_{ij},\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.3}$$

$$a(i,\ j;\ k,\ l)=0,\ \forall(k,\ l)\bar{\in}F_{ij}\cup\{(i,\ j)\}\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.4}$$

其中

$$F_{ij}=\{(i,\ j-1),\ (i-1,\ j),\ (i,\ j+1),\ (i+1,\ j)\}\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.5}$$

显然，狭义二维格子场是不可约的。

定理6.4.1. 狭义二维格子点场有势的充要条件是

$$a(i,\ j;\ i+1,\ j)a(i+1,\ j;\ i+1,\ j+1)a(i+1,\ j+1;\ i,\ j+1)a(i,\ j+1;\ i,\ j)=a(i,\ j;\ i,\ j+1)\,a(i,\ j+1;\ i+1,\ j+1)\,a(i+1,j+1;\ i+1,\ j)a(i+1,\ j;\ i,\ j)\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.6}$$

证明 记

$$L_{ij}:\ (i,\ j)\to(i+1,\ j)\to(i+1,\ j+1)\to(i,\ j+1)\to(i,\ j) \tag{6.4.7}$$

则(6.4.6)等价于

$$\varphi(L_{ij})=0. \tag{6.4.8}$$

由定理6.3.4立知条件是必要的。往证充分性：设

$$L:\ e\to e_1\to e_2\to\cdots\to e_n\to e \tag{6.4.9}$$

是任一闭合回路。我们需要证明

$$\varphi(L)=0. \tag{6.4.10}$$

如果e，e_1，e_2，…，$e_n(n\geqslant 3)$互不相同，则我们称L是单圈的，否则称为复合回路。称回路

L'：$e_1'\to e_2'\to\cdots\to e_{k-1}'\to e_k'\to e_{k-1}'\to\cdots\to e_1'$为$e_1'$和$e_k'$之间的对流回路。显然

$$\varphi(L')=0. \tag{6.4.11}$$

由于每一个复合闭回路可以分解成若干个单圈闭回路和若干个对流回路。于是，我们只需就单圈闭回路证明(6.4.10)便已足够。

今设L是形如(6.4.9)的单圈。记其长度为l。易见$l\geqslant 4$。如果$l=4$，则条件(6.4.6)表明(6.4.10)成立。今设对于$l\leqslant k-1$的单圈L已真，往证对$l=k\geqslant 5$亦真。显然一定存在一条穿过格子点且平行于坐标轴的直线L_0，它将L所围成的区域分成两部分。从e出发，设沿L第一次到达L_0的点为e_k，然后从e_k继续沿L走，我们将在某处离开L_0，设离开L_0之后，首次重新回到L_0的点是$e_l(l<k)$。以e_k和e_l为端点的线段把L所围成的区域分成两部分。同时也把L分成L'和L''两部分。设在L_0上夹在e_k和e_l之间的格子点依次为e_0'，e_1'，…，e_m' ($m\geqslant 0$)。

记

$$\widetilde{L}：e_k\to e_0'\to e_1'\to\cdots\to e_m'\to e_l \tag{6.4.12}$$

由于平面上两点间以直线的距离最短，故有

$$\widetilde{l}<l',\ \widetilde{l}<l'' \tag{6.4.13}$$

其中$\widetilde{l}$是$\widetilde{L}$的长度，其余类推。再记

$$\begin{aligned}L_1：&e\to e_1\to\cdots\to e_k\to e_0'\to e_1'\to\cdots\to e_m'\to\\&\to e_l\to e_{l+1}\to\cdots\to e_n\to e\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

$$L_2: e_k \to e_{k+1} \to \cdots \to e_l \to e'_m \to \cdots \to e'_1 \to e'_0 \to e_k \qquad (6.4.15)$$

无妨设L_1和L_2都是单圈（否则，去掉对流部分，得到若干新的单圈，以这些单圈代替L_1和L_2，以下讨论更应成立）。于是由(6.4.13)知$l_1<l$，$l_2<l=k$。即

$$l_1 \leqslant k-1, \quad l_2 \leqslant k-1. \qquad (6.4.16)$$

由此及归纳假设知

$$\varphi(L_1)=\varphi(L_2)=0. \qquad (6.4.17)$$

但易见

$$\varphi(L)=\varphi(L_1)+\varphi(L_2). \qquad (6.4.18)$$

故(6.4.10)对于$l=k$的单圈也成立。于是，由归纳法知定理成立。

定理6.4.2. 如果狭义二维格子点场a有势，则它的势函数是$(-\log\pi(i,\ j),\ (i,\ j)\in E_2)$，

$$\pi(i,\ j)=\pi(0,\ 0)\prod_{l=\mathrm{sign}\,i}^{i}\frac{a(l-\mathrm{sign}\,i,\ 0;\ e,0)}{a(l,\ 0;\ l-\mathrm{sign}\,i,\ 0)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=\mathrm{sign}\,j}^{j}\frac{a(i,\ k-\mathrm{sign}\,j;\ i,\ k)}{a(i,\ k;\ i,\ k-\mathrm{sign}\,j)} \qquad (6.4.19)$$

其中sign(•)是符号函数，$\pi(0,\ 0)$是任意正常数。

证明 我们只对$\forall(i,\ j)\in E_2$，$i>0$，$j>0$验证(6.4.19)，其余情况类似。取一条路

$$e_0=(0,\ 0)\to(1,\ 0)\to(2,\ 0)\to\cdots\to(i,\ 0)\to$$
$$\to(i,\ 1)\to(i,\ 2)\to\cdots\to(i,\ j)=e$$

则由(6.3.9)和(6.3.10)得

$$\hat{a}(e_0; e)=\prod_{l=1}^{i}a(l-1, 0; l, 0)\prod_{k=1}^{j}a(i, k-1; i, k) \tag{6.4.20}$$

$$\hat{a}(e; e_0)=\prod_{k=1}^{j}a(i, k; i, k-1)\prod_{l=1}^{i}a(l, 0; l-1, 0) \tag{6.4.21}$$

由(6.4.20)、(6.4.21)和定理6.3.6知本定理成立。

定义6.4.2. 场$a=(a(i, j; k, l), (i, j), (k, l)\in E_2)$称为二维格子点场，如果它满足条件(6.4.4)和

$$\prod_{(k, l)\in F_{ij}}a(i, j; k, l)\neq 0, \ \forall (i, j)\in E_2 \tag{6.4.22}$$

并且不可约①。其中F_{ij}如(6.4.5)。

设L_1和L_2是两个单圈闭合回路，它们所围成的区域分别是Z_1和Z_2。如果Z_1与Z_2重合，我们就把L_1和L_2叫作类同的(因为它们至多是起点或方向不同)，否则称为非类同的；如果$Z_1\subset Z_2$，我们就称L_1含于L_2之中.如果在L_1内不含有任何非类同于L_1并且与L_1有某些公共边的单圈，则称L_1为一个单元。记$a=(a(i, j; k, l))$的单元的全体为$\underline{\underline{P}}$。

定理6.4.3. 二维格子点场 $a=(a(i, j; k, l); (i, j), (k, l)\in E_2)$有势的充要条件是：对于每一个$L\in\underline{\underline{P}}$,

L: $e\to e_1\to e_2\to\cdots\to e_n\to e$

都有

---

①假定不可约只是为了讨论的方便，而并不失一般性。因为a零同，故总可把它分成若干不可约的类。

$$a(e;\ e_1)a(e_1;\ e_2)\cdots a(e_{n-1};\ e_n)a(e_n;\ e)$$

$$=a(e;\ e_n)a(e_n;\ e_{n-1})\cdots a(e_2;\ e_1)a(e_1;\ e) \quad (6.4.23)$$

即

$$\varphi(L)=0. \quad (6.4.24)$$

证明 这里的证法与定理6.4.1的证法不同．那里考虑长度，而这里则考虑面积．

我们只须考虑单圈情形。

设L为任一单圈，

$$L=(e,\ e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ e).$$

现在，我们用$S(L)$表示Z内所含单位正方形的个数，即Z的面积．自然$S(L)\geqslant 1$。如果L是一个单元，则由(6.4.24)知断言已真．假定对于$S(L)\leqslant k-1$的单圈L均有$\varphi(L)=0$。往证$S(L)=k$ $(k\geqslant 2)$的情形.无妨设L非单元.由于L是单圈，故它的每一条边必定属于且仅属于其一个含于L内的单元．设L含有的以$e\rightarrow e_1$为边的一个单元是$\widetilde{L}$；$e\rightarrow e_1\rightarrow\cdots\rightarrow e_k\rightarrow e_1'\rightarrow e_2'\rightarrow\cdots\rightarrow e_m'\rightarrow e$。则由(6.4.24)知$\varphi(\widetilde{L})=0$。记$L'=(e,\ e_m',\ \cdots,\ e_2',\ e_1',\ e_k,\ e_{k+1},\ \cdots,\ e_n,\ e)$.则$\varphi(L')=\varphi(L)$。如果$L'$仍然是单圈，则由$S(L')=k-1$及归纳假设知断言成立．否则，去掉$L'$的对流部分，可分解成若干个单圈．每一个单圈$L''$的$S(L'')<k-1$．故由归纳假设断言亦真．定理的证明遂告完成。

§6.5. $N(\geqslant 2)$维格子点场

取

$$E_1=(0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ,\ \cdots\cdots) \quad (6.5.1)$$

$$E_N=E_1\times E_1\times\cdots\times E_1(N\text{重}) \quad (6.5.2)$$

并用$e=(i_1, i_2, \cdots, i_N)$表$E_N$中的点。

定义6.5.1. 场$a=(a(e;e'); e, e'\in E_N)$称为(狭义)$N$维格子点场，如果它满足条件：

$$a(e; e')>0, \ \forall e'\in F_e, \ \forall e\in E_N \tag{6.5.3}$$

$$a(e; e')=0, \ \forall e' F_e\cup\{e\}, \ \forall e\in E_N \tag{6.5.4}$$

其中

$$e=(i_1, i_2, \cdots, i_N) \tag{6.5.5}$$

$$F_e=\{(i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}, i_k+\delta_k, i_{k+1}, \cdots, i_N); \\ \delta_k=\pm 1, 1\leqslant k\leqslant N\} \tag{6.5.6}$$

定理6.5.1. 狭义N维格子点场$a=(a(e; e'); e, e'\in E_N)$有势的充要条件是

$$a(e; e_{k,l}^{(1)})a(e_{k,l}^{(1)}; e_{k,l}^{(2)})a(e_{k,l}^{(2)}; e_{k,l}^{(3)})a(e_{k,l}^{(3)}; e) \\ =a(e; e_{k,l}^{(3)})a(e_{k,l}^{(3)}; e_{k,l}^{(2)})a(e_{k,l}^{(2)}; e_{k,l}^{(1)})a(e_{k,l}^{(1)}; e). \\ 1\leqslant k<l\leqslant N, \ \forall e\in E_N \tag{6.5.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} e_{k,l}^{(1)}&=(i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k+1, i_{k+1}, \cdots, \\ &\quad i_{l-1}, i_l, i_{l+1}, \cdots, i_N) \\ e_{k,l}^{(2)}&=(i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k+1, i_{k+1}, \cdots, \\ &\quad i_{l-1}, i_l+1, i_{l+1}, \cdots, i_N) \\ e_{k,l}^{(3)}&=(i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \cdots, \\ &\quad i_{l-1}, i_l+1, i_{l+1}, \cdots, i_N) \end{aligned}\right\} \tag{6.5.8}$$

证明 显然只需讨论单圈(定义如上)情形。设$L=(e, e_1, e_2, \cdots, e_n, e)$是单圈的。记它的长度为$l$。易见$l\geqslant 4$。如果$l=4$，则条件(6.5.7)表明$\varphi(L)=0$。如果$l>4$，但L为一个$N$维单位正方体所包围（即L为这个单位正方体的一些棱组成的闭合回路），则容易由条

件(6.5.7)直接验证$\varphi(L)=0$。因此，我们只需考虑不能为一个N维单位正方体所包围的那种单圈L。对于这种L，必定存在一个与坐标平面平行并通过格子点的平面 Z(二维超平面 (如$N\geqslant 3$)，或直线 ($N=2$))，将L分成两部分。从e出发，设沿L第一次到达Z的点是e_k，然后，从e_k继续沿L走，我们将在某处离开Z。设离开Z之后，首次返回Z的点是$e_l(l>k)$，则e_k和e_l将L分成两部分，一部分是

$$L_1=(e, e_1, \cdots, e_k) \text{ 及 } L_2=(e_l, e_{l+1}, \cdots, e_n, e);$$

另一部分是

$$L_3=(e_k, e_{k+1}, \cdots, e_l)。$$

在平面Z上，取定一条从e_k到e_l的最短路 $L_4=(e_k, e_1', e_2', \cdots, e_i', e_l)$。我们说$l_3$(它是$L_3$的长度，以下类推)$>l_4$。事实上，将$L_3$投影于平面Z得$L_3'$；由$L_4$的最短性质立知$l_4\leqslant l_3'$；由此易见$l_3>l_4$。类似地有$l_1+l_2>l_4$。记

$$L_5=(e, e_1, \cdots, e_k, e_1', e_2', \cdots, e_i', e_l, e_{l+1}, \cdots, e_n, e)$$

$$L_6=(e_k, e_{k+1}, \cdots, e_l, e_i', e_{i-1}' \cdots, e_1', e_k)$$

则$l_5<l$且$l_6<l$，并且$\varphi(L)=\varphi(L_5)+\varphi(L_6)$。由此事实及数学归纳法立知$\varphi(L)=0$。定理证毕。

定理6.5.2 如果N维格子点场$a=(a(e; e'), e, e'\in E_N)$有势，则它的势函数为$(-\log\pi_e, e\in E_N)$：

$$\pi_e=\pi_{e_0}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=\text{sign}\, i_k}^{i_k}\frac{a(e_{k,l-\text{sign}\, i_k}; e_{k,e})}{a(e_{k,l}; e_{k,l-\text{sign}\, i_k})},$$

$$e\in E_N。 \quad (6.5.9)$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}
e_0 = e_{10} = (0,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\
e_{1,\mathrm{sign}i_1} = (\mathrm{sign}i_1,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\
e_{1,2\mathrm{sign}i_1} = (2\mathrm{sign}i_1,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_{1,i_1-\mathrm{sign}i_1} = (i_1 - \mathrm{sign}i_1, 0,\ \cdots,\ 0) \\
e_{1,i_1} = (i_1,\ 0,\ \cdots,\ 0) = e_{20} \\
e_{2,\mathrm{sign}i_2} = (i_1,\ \mathrm{sign}i_2,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\
e_{2,2\mathrm{sign}i_2} = (i_1,\ 2\mathrm{sign}i_2,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_{2i_2} = (i_1,\ i_2,\ 0,\ \cdots,\ 0) = e_{30} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_{Ni_N} = (i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_N) = e
\end{array}\right\} \quad (6.5.10)$$

而 v_{e_0}是任意正常数。

证明 对于$\forall e \in \mathrm{E}_N$，取一条从$e_0$到$e$路为：

$$\mathrm{L}_e = (e_0 = e_{10},\ e_{1,\mathrm{sign}i_1},\ e_{1,2\mathrm{sign}i_1},\ \cdots,\ e_{1i_1},$$

$$e_{2,\mathrm{sign}i_2},\ \cdots,\ e_{2i_2},\ \cdots,\ e_{Ni_N} = e)$$

则

$$\hat{a}(e_0,\ e) = \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=\mathrm{sign}i_k}^{i_k} a(e_{k,l-\mathrm{sign}i_k},\ e_{k,l}) \quad (6.5.11)$$

$$\hat{a}(e,\ e_0) = \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=\mathrm{sign}i_k}^{i_k} a(e_{k,l},\ e_{k,l-\mathrm{sign}i_k}) \quad (6.5.12)$$

故由定理6.3.6立得本定理。

定义6.5.2. 称场 $a = (a(e,\ e'),\ e,\ e' \in \mathrm{E}_N)$ 为N 维格子点

场，如果它满足条件(6.5.4)及

$$\prod_{e'\in F_e} a(e;\ e')\neq 0,\quad \forall e\in \mathrm{E}_N \tag{6.5.13}$$

并且不可约。其中F_e如(6.5.6)。

设$\mathrm{L}=(e=e_0,\ e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ e_{n+1}=e)$为$a=(a(e;\ e'))$的单圈。L 的每一条边 $e_k\rightarrow e_{k+1}(0\leqslant k\leqslant n)$ 都是某个N维单位正方体的棱。因此，存在若干个N维单位正方体，它们的棱包含了L的每一条边。此时我们称这些正方体复盖 L，设 $V(\mathrm{L})$ 为复盖L的N维单位正方体的一个集合，其个数记作${}_mV(\mathrm{L})$。称$V(\mathrm{L})$为L的一个最小复盖，如果对于L的任一复盖$V'(\mathrm{L})$，都有${}_mV(\mathrm{L})\leqslant {}_mV'(\mathrm{L})$。L的最小复盖记作 $V_0(\mathrm{L})$。它所包含的N维单位正方体的个数记作$l={}_mV_0(\mathrm{L})$。对于一个给定的L，相应的最小复盖$V_0(\mathrm{L})$ 不必唯一，但l却是唯一确定的。

今设L′是另一个单圈。称L′与L相连，如果L′的某些边与L的某些边重合（只谈“边”时，不管它的方向如何；谈“路”时带有方向）。现在，我们假定L′与L相连。设$V_0(\mathrm{L})$ 是L的一个最小复盖，它也复盖L′。记$V_0(\mathrm{L})$ 中复盖L′ 的N维单位正方体之集为$V'(\mathrm{L})$；将L 和L′合并起来，并将L和L′的重合部分去掉，我们得到一个新的单圈L″，相应的有 $V''(\mathrm{L})$。如果存在L的一个最小复盖 $V_0(\mathrm{L})$，使得如上得到的$V'(\mathrm{L})$和$V''(\mathrm{L})$满足

$${}_mV'(\mathrm{L})<l,\quad {}_mV''(\mathrm{L})<l \tag{6.5.14}$$

我们就称L是非单元的。否则称之为(a的) 单元。记a的一切单元之集为$\underline{\underline{P}}$。

定理6.5.3. N维格子点场$a=(a(e;\ e'),\ e,\ e'\in \mathrm{E}_N)$ 有势的充要条件是

$$\varphi(\mathrm{L})=0,\quad \forall \mathrm{L}\in \underline{\underline{P}} \tag{6.5.15}$$

证明 我们只需证明单圈情形．设L为任一单圈．若$l=1$，则L被一个N维单位正方体所复盖．在单位正方体内的任一单圈都是单元，故由(6.5.15)知$\varphi(L)=0$．今设对于$l\leqslant k-1(k\geqslant 2)$的单圈断言已真，往证$l=k$的情形．如果$L$是单元，则由(6.5.15)又得到$\varphi(L)=0$．因此无妨设$L$非单元．由前面的说明知，此时存在两个单圈$L'$和$L''$，使得

$$l'\leqslant_m V'(L)<l=k, \tag{6.5.16}$$

$$l''\leqslant_m V''(L)<l=k, \tag{6.5.17}$$

$$\varphi(L)=\varphi(L')+\varphi(L''). \tag{6.5.18}$$

由(6.5.16)，(6.5.17)和归纳假设知$\varphi(L')=\varphi(L'')=0$．故由(6.5.18)知$\varphi(L)=0$．定理得证．

§6.6. 有势马尔可夫链

从本节开始，我们将把前面所建立的场论应用于马尔可夫过程(以后所说的过程均指不中断过程，当然，绝大多数结论并不依赖于"不中断"的假设)．

设$X(\omega)=(x(n,\omega),\ n\geqslant 0)$是定义概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个齐次马尔可夫链．它的状态空间是$E$．$n(\geqslant 1)$阶转移概率矩阵为$P(n)=(p_{ij}(n),\ i,j\in E)$．

我们所关心的不是过程$X(\omega)$本身，而是它的n阶转移矩阵，称$P(n)$为零同的，如果

$$p_{ij}(n)>0\Longleftrightarrow p_{ji}(n)>0,\ \forall i,\ j\in E,$$
$$\forall\ n\in T. \tag{6.6.1}$$

定义6.6.1. 设$p(n)$零同．取$T=(1,2,\cdots)$，$a_{ij}(t)=p_{ij}(t)$，$t\in T$．则由本章§6.2所定义的场$P(n)=(p_{ij}(n))$称为马尔可夫

链场。

由定理6.3.4立即得到

定理6.6.1. 关于马尔可夫链场$P(n)=(p_{ij}(n))$，下述断言等价：

(i) $P(n)$ 有势；

(ii) $P(n)$ 路径无关；

(iii) $P(n)$ 弱可配称；

(iv) 对于$\forall n\in T$，$\forall l\in D(n)$，$\forall i$，$j\in E_l(n)$，有

$$\hat{p}_{\Delta_l i}(n)\, p_{ij}(n)\, \hat{p}_{j\Delta_l}(n) = \hat{p}_{\Delta_l j}(n) p_{ji}(n) \hat{p}_{i\Delta_l}(n) \quad (6.6.2)$$

这里所用的记号的意义见本章§6.3.（注意以 $(p_{ij}(n))$ 代替那里的 $(a_{ij}(t))$）。

下述定理是本节的主要结果。

定理6.6.2. 马尔可夫链场$P(n)=(p_{ij}(n))$ 的一切保守势(即与n无关的势) 形如

$$u_i = -\log v_i(1) + c_l,\ l\in D(1),\ i\in E_l(1) \quad (6.6.3)$$

这里$c_l(l\in D(1))$为任意常数，其它符号的意义见本章§6.3。

证明 显然，我们只需证明 $(-\log v_i(1))$ 是$P(n)$的势。为此，只需证明

$$v_i(1)p_{ij}(n) = v_j(1)p_{ji}(n),\forall n,\forall i,j\in E \quad (6.6.4)$$

由(6.3.11)和(6.6.3)，我们已有

$$v_i(1)p_{ij}(1) = v_j(1)p_{ji}(1),\ \forall i,\ j\in E \quad (6.6.5)$$

于是，若假定 (6.6.3) 对$n-1$成立，则由 *Kolmogorof–Chapman*方程得

$$\begin{aligned} v_i(1)p_{ij}(n) &= \sum_{k\in E} v_i(1)p_{ik}(n-1)p_{kj}(1) \\ &= \sum_{k\in E} v_k(1)p_{ki}(n-1)p_{kj}(1) \end{aligned}$$

$$= v_j(1)\sum_{k\in E} p_{jk}(1)\ p_{ki}(n-1)$$

$$= v_j(1)p_{ji}(n)。 \qquad (6.6.6)$$

于是（6.6.4）对n亦真。定理得证。

在研究马尔可夫链场 $P(n)=(p_{ij}(n))$ 时，我们的主要兴趣是它的保守势。定理6.6.2表明，$P(n)$ 的保守势由 $P(1)$ 的势完全确定。故以后只讨论$P(1)$。并把$P(1)=(p_{ij}(1))$ 简记成 $P=(p_{ij})$。称之为链场(满足零同性条件)。

由定理6.6.1和定理6.6.2得

定理6.6.3. 对于链场$P=(p_{ij})$，下述断言等价：

（i）P有势；

（ii）P路径无关；

（iii）P弱可配称；

（iv）对于$\forall l\in D$，$\forall i$，$j\in E_l$，有

$$\hat{p}_{\Delta_l i}\, p_{ij}\, \hat{p}_{j\Delta_l} = \hat{p}_{\Delta_l j}\, p_{ji}\, \hat{p}_{i\Delta_l} \qquad (6.6.7)$$

而在有势的条件下，它的一切势函数形如：

$$u_i = -\log v_i + c_l,\ l\in D,\ i\in E_l \qquad (6.6.8)$$

其中

$$v_i=\begin{cases}\dfrac{\hat{p}_{\Delta_l i}}{\hat{p}_{i\Delta_l}}, & \text{如} i\in E_l,\ i\neq\Delta_l; \\ 1, & \text{如} i=\Delta_l\end{cases} \qquad (6.6.9)$$

而它的一切配称列形如（$w_l v_i$：$l\in D$，$i\in E$），这里的（w_l：$l\in D$）是任意选定的正数列。

定义6.6.2. 设(u_i) 是$P=(p_{ij})$ 的任一势，命

$$w_i = exp(-u_i), \ \forall i \in E. \tag{6.6.10}$$

则(w_i)是P的一个配称列，称之为由势(u_i)产生的配称列。

定理6.6.4. 链场$P=(p_{ij})$的每一个势(u_i)所产生的配称列w_i都是（P的）有限正调和测度。其意义是

$$0 < w_i < \infty, \ \forall i \in E. \tag{6.6.11}$$

$$w_i = \sum_{k \in E} w_k p_{ki}, \ \forall i \in E. \tag{6.6.12}$$

证明 前者显然。后者由(w_i)为配称列及$P=(p_{ij})$不中断导出。

由定理6.6.3立即得到

定理6.6.5. 马尔可夫链$P=(p_{ij})$可配称(即可逆)的充要条件是下述条件同时成立。

(i) P是零同的；

(ii) 定理6.6.3中的(i)—(iv)之一成立；

(iii) 对于每一个$l \in D$,

$$\pi_l^{-1} \hat{=} \sum_{i \in E_l} \frac{\hat{p}_{\Delta_l i}}{\hat{p}_{i \Delta_l}} < \infty. \tag{6.6.13}$$

在P可配称时，若命

$$\pi_i^{(l)} = \frac{\hat{p}_{\Delta_l i}}{\hat{p}_{i \Delta_l}} \left(\sum_{i \in E_l} \frac{\hat{p}_{\Delta_l j}}{\hat{p}_{j \Delta_l}} \right)^{-1}, \ i \in E_l, \ l \in D \tag{6.6.14}$$

任意选取$w_l > 0$，$\sum_{l \in D} w_l = 1$，并命

$$u_i = \pi_i^{(l)} w_l, \ i \in E_l, \ l \in D \tag{6.6.15}$$

则(u_i)便是$P=(p_{ij})$的一个配称分布。而且一切配称分布形如(6.6.15)。如果$P=(p_{ij})$不可约，则(u_i)就是唯一的配称分布。

§6.7. 有势二元组随机徘徊

取

$$E_1=(0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{6.7.1}$$

$$E_2=E_1\times E_1 \tag{6.7.2}$$

定义6.7.1. 设$X(\dot{\omega})=\{x(n,\omega);\ n\geqslant0\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的齐次马尔可夫链，其状态空间是$E_2$，转移矩阵是$P=(p_{(i,j),(k,l)};\ (i,j),\ (k,l)\in E_2)$，如果

$$\sum_{(k,l)\in F_{ij}\cup\{(i,j)\}} p_{(i,j),(k,l)}=1,\qquad \forall(i,j)\in E_2 \tag{6.7.3}$$

$$p_{(i,j),(k,l)}>0,\forall(k,l)\in F_{ij},\forall(i,j)\in E_2 \tag{6.7.4}$$

$$p_{(i,j),(k,l)}=0,\ \forall(k,l)\overline{\in}F_{ij}\cup\{(i,j)\}\qquad \forall(i,j)\in E_2 \tag{6.7.5}$$

其中 $$F_{ij}=\{(i,j-1),(i,j+1),(i-1,j),(i+1,j)\},\qquad (i,j)\in E_2 \tag{6.7.6}$$

则称$X(\omega)$（或$P=(p_{(i,j),(k,l)})$）为(狭义)二元组随机徘徊。

为书写方便，以后也把$p_{(i,j),(k,l)}$写成$p(i,j;\ k,l)$。

由定理6.6.3，定理6.4.1和定理6.4.2立即得到

定理6.7.1. 关于二元组随机徘徊$P=(p_{(i,j),(k,l)})$，下述断言等价：

(i) 它有势；

(ii) 它路径无关；

(iii) 对于一切$(i,j)\in E_2$，有

$p(i,j;i+1,j)\ p(i+1,j;i+1,j+1)\cdot$

$$\cdot p(i+1,j+1;i,j+1)\ p(i,j+1;i,j)$$

$$=p(i,j;i,j+1)\ p(i,j+1;i+1,j+1)\cdot$$

$$\cdot p(i+1,j+1;i+1,j)\ p(i+1,j;i,j). \qquad (6.7.7)$$

若它有势，则势函数是 $(-\log\pi(i,j);\ (i,j)\in E_2)$，

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\prod_{l=\mathrm{sign}\,i}^{i}\frac{p(l-\mathrm{sign}\,i,0;l,0)}{p(l,0;l-\mathrm{sign}\,i,0)}\cdot\prod_{k=\mathrm{sign}\,j}^{j}\frac{p(i,k-\mathrm{sign}\,j;i,k)}{p(i,k;i,k-\mathrm{sign}\,j)},$$

$$(i,j)\in E_2. \qquad (6.7.8)$$

此处 $\pi(0,0)$ 是任意正常数.

定理6.7.2. 二元组随机徘徊 $P=(p(i,j;k,l))$ 可配称（即可逆）的充要条件是定理6.7.1中的(i)～(iv)之一成立，并且

$$(\pi(0,0))^{-1}\triangleq\sum_{(i,j)\in E_2}\prod_{l=\mathrm{sign}\,i}^{i}\frac{p(l-\mathrm{sign}\,i,0;l,0)}{p(l,0;l-\mathrm{sign}\,i,0)}\cdot\prod_{k=\mathrm{sign}\,j}^{j}\frac{p(i,k-\mathrm{sign}\,j;i,k)}{p(i,k;i,k-\mathrm{sign}\,j)}<\infty. \qquad (6.7.9)$$

在可配称时，唯一的配称分布是由这里的 $\pi(0,0)$ 和 (6.7.8)所定义的 $(\pi(i,j);\ (i,j)\in E_2)$.

例1 取

$$\left.\begin{aligned}&p(i,j;i+1,j)=p>0,\\&p(i,j;i-1,j)=q>0,\\&p(i,j;i,j+1)=r>0,\\&p(i,j;i,j-1)=s>0,\\&p(i,j;i,j)=t\geqslant 0,\\&p+q+r+s+t=1\end{aligned}\quad\forall(i,j)\in E_2\right\} \qquad (6.7.10)$$

显然，此时(6.7.7)式的两端都等于$pqrs$。故此随机徘徊有势。它的势函数是 $(-\log\pi(i,j),\ (i,j)\in E_2)$，

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\left(\frac{p}{q}\right)^i\left(\frac{r}{s}\right)^j. \quad (i,j\in E_2) \quad (6.7.11)$$

在(6.7.10)的条件下，

$$\sum_{(i,j)\in E_2}\left(\frac{p}{q}\right)^i\left(\frac{r}{s}\right)^j=\infty. \quad (6.7.12)$$

故由定理6.7.2知它不可逆。

例2 在上例中，取

$$p=q=r=s=\alpha,\ 0<\alpha\leqslant\frac{1}{4},\ t=1-4\alpha \quad (6.7.13)$$

则 $v(i,j)\equiv v(0,0)$。它也不可逆。

例3 取

$$\left.\begin{aligned}
&p(i,j;\ i+1,j)=\begin{cases}\alpha, & \text{当}\, i<0,\\ \beta, & \text{当}\, i\geqslant 0;\end{cases}\\
&p(i,j;\ i,j+1)=\begin{cases}\alpha, & \text{当}\, j<0,\\ \beta, & \text{当}\, j\geqslant 0;\end{cases}\\
&p(i,j;\ i-1,j)=\begin{cases}\alpha, & \text{当}\, i>0,\\ \beta, & \text{当}\, i\leqslant 0;\end{cases} \quad \forall (i,j)\in E_2\\
&p(i,j;\ i,j-1)=\begin{cases}\alpha, & \text{当}\, j>0,\\ \beta, & \text{当}\, j\leqslant 0;\end{cases}\\
&p(i,j;\ i,j)=\begin{cases}t, & \text{当}\, i=j=0,\\ \gamma, & \text{当}\, ij\neq 0,\\ \delta, & \text{当}\, ij=0.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (6.7.14)$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=1\\ \alpha+3\beta+\delta=1\\ 4\beta+t=1\\ \alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\ \delta>0,\ t>0\end{array}\right\}\qquad(6.7.15)$$

则易见这个随机徘徊有势。它的势函数是

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{i\,\mathrm{sign}\,i+j\,\mathrm{sign}\,j}\qquad(i,j)\in E_2$$

$$(6.7.16)$$

因为

$$\sum_{(i,j)\in E_2}\pi(i,j)=4\pi(0,0)\sum_{i>0}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^i\sum_{j\geq 0}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j\qquad(6.7.17)$$

故它可逆的充要条件是$\alpha>\beta$。

上述例子表明有势马尔可夫过程很多。即条件(6.7.7)(进而条件(6.3.13))是可实现的。另一方面，我们也已经看到，条件(6.7.7)在应用中是非常方便的。我们说，它已经不能再改进了。换言之，我们有

定理6.7.3. (6.7.7)中各条件独立。

证明 只需证明(6.7.7)中的任一条件不能由其它条件推出。为此，我们构造一个过程$P=(p(i,j;\ k,l))$，对于它来说，(6.7.7)中仅有一个条件（预先任意选定的）不成立，而其它一切条件都成立。

取$\bar{P}=(\bar{p}(i,j;\ k,l))$为例2中的有势马尔可夫链：

$$\bar{p}(i,j;i+1,j)=\bar{p}(i,j;i-1,j)=\bar{p}(i,j;i,j+1)$$

$$=\bar{p}(i,j;i,j-1)=\alpha\qquad(6.7.18)$$

$$\bar{p}(i,j;i,j)=1-4\alpha\qquad(6.7.19)$$

$$0<\alpha<\frac{1}{4} \tag{6.7.20}$$

它满足(6.7.7) 中的一切条件。今取 $0<\varepsilon<\min\left(3,\frac{1-3\alpha}{\alpha}\right)$，并命

$$p(i,j;k,l)=\begin{cases}1-3\alpha-\alpha\varepsilon, & \text{当}l=k=j=i\text{ 且}i\leqslant 0,\\ 1-3\alpha+\alpha\varepsilon, & \text{当}k=i,l=j=i-1\text{ 且}i\leqslant 0,\\ \bar{p}(i,j;k,l)\varepsilon, & \text{当}l=j=i,k=i+1\text{且}i\leqslant 0,\\ \bar{p}(i,j;k,l)\varepsilon^{-1}, & \text{当}l=k=i,j=i-1\text{ 且}i\leqslant 0,\\ \bar{p}(i,j;k,l), & \text{其它。}\end{cases} \tag{6.7.21}$$

则易见 $(p(i,j;k,l))$ 是二元组随机徘徊，并且

$$\begin{aligned}&p(0,0;1,0)\ p(1,0;1,1)\ p(1,1;0,1)\ p(0,1;0,0)\\ &=\bar{p}(0,0;1,0)\cdot\varepsilon\,\bar{p}(1,0;1,1)\bar{p}(1,1;0,1)\bar{p}(0,1;0,0)\\ &=\alpha^4\varepsilon,\end{aligned} \tag{6.7.22}$$

$$\begin{aligned}&p(0,0;0,1)\ p(0,1;1,1)\ p(1,1;1,0)\ p(1,0;0,0)\\ &=\bar{p}(0,0;0,1)\ \bar{p}(0,1;1,1)\ \bar{p}(1,1;1,0)\ \bar{p}(1,0;0,0)\\ &=\alpha^4.\end{aligned} \tag{6.7.23}$$

所以(6.7.7) 中的条件对于 $(i,j)=(0,0)$不满足。但容易验证(6.7.7)中的其它条件均满足。注意在构造上述例子时，取$(i,j)=(0,0)$只是为了叙述的方便，构造的方法具有一般性。因此，定理已经证明。

二维随机徘徊的边界不象一维时那么简单，而是相当复杂的。下面，我们举两个例子予以说明。

例4 （单点边界）。

每一个常返二维随机徘徊都可以作为单点边界之例。上面的例子便是一例。

例5 （可列个边界）。

取

$$p(0,j;0,j-1)=p(0,j;0,j+1)=p(0,j;-1,j)$$

$$=p(0,j;+1,j)=\frac{1}{4},\ \forall j\in E_1 \qquad (6.7.24)$$

$$\left.\begin{aligned}p(i,j;\ i+1,\ j)=\frac{3}{4}\\ p(i,j;\ i-1,\ j)=\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}(i>0),\forall(i,j)\in E_2. \qquad (6.7.25)$$

$$\left.\begin{aligned}p(i,j;\ i-1,\ j)=\frac{3}{4}\\ p(i,j;\ i+1,\ j)=\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}(i<0),\forall(i,j)\in E_2. \qquad (6.7.26)$$

因为任意两点间只有一条无“对流”的路，故由定理 6.3.5 知它有势。今计算它的势。

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\left(\frac{1}{4}\right)^j\Big/\left(\frac{1}{4}\right)^j$$

$$=\pi(0,0),\ (i=0) \qquad (6.7.27)$$

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)^i}$$

$$=\pi(0,0)3^{i-1} \qquad (i>0) \qquad (6.7.28)$$

同理可得

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)3^{|i|-1} \qquad (i<0) \qquad (6.7.29)$$

于是

$$\sum_{(i,j)\in E_2}\pi(i,j)=+\infty. \qquad (6.7.30)$$

所以此链非遍历。下面我们还将证明它是非常返的。

令

$$A_j=((i,j);\ -\infty<i<+\infty),\quad j=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{6.7.31}$$

往证

$$P(\bar{\mathscr{L}}(A_0))>0. \tag{6.7.32}$$

命

$$\bar{A}_0=\bigcup_j A_j\setminus A_0 \tag{6.7.33}$$

$$f^*_{(i,j)\bar{A}_0}=P\,(\exists n\geqslant0,\ 使\ x_n\in\bar{A}_0\,|\,x_0=(i,j)) \tag{6.7.34}$$

简记$f^*_{(i,0)\bar{A}_0}$为$f^*_{i\bar{A}_0}$。由〔1，定理6.3.2〕知 $f^*_{i\bar{A}_0}(-\infty<i<+\infty)$为下列方程组的最小非负解。

$$\left.\begin{aligned}
&x_0=\frac{1}{4}x_{-1}+\frac{1}{4}x_{+1}+\frac{1}{2}\\
&x_i=\frac{3}{4}x_{i+1}+\frac{1}{4}x_{i-1}\qquad (i>0)\\
&x_{-i}=\frac{3}{4}x_{-(i+1)}+\frac{1}{4}x_{-(i-1)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.7.35}$$

由对称性知

$$x_i=x_{-i}\qquad (i>0) \tag{6.7.36}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}
&x_0=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\\
&x_i=\frac{3}{4}x_{i+1}+\frac{1}{4}x_{i-1}\qquad (i>0)\\
&x_i=x_{-i}
\end{aligned}\right\} \tag{6.7.37}$$

从而

$$\frac{3}{4}\ (x_{i+1}-x_i)=\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1})\ \ (i>0)\qquad(6.7.38)$$

即

$$x_{i+1}-x_i=\frac{1}{3}\ (x_i-x_{i-1})$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^i\ (x_1-x_0)\quad(i>0)\qquad(6.7.39)$$

所以

$$x_{i+1}=\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k(x_1-x_0)+x_0,(i>0).\qquad(6.7.40)$$

由(6.7.37)的第一式和(6.7.40)得

$$x_{i+1}=\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k(x_0-1)+x_0,\ (i>0).\qquad(6.7.41)$$

即

$$x_{i+1}=\left(\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)x_0-\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k(i>0).\ (6.7.42)$$

上式为我们的方程组的一些解之表达式。而我们需要的是其中的最小非负解。欲使它为非负解，必须且只需

$$\left.\begin{array}{l}x_0\geqslant 0\\ \cdots\cdots\\ \left(\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)x_0-\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k\geqslant 0\end{array}\quad(i>0)\right\}\ (6.7.43)$$

即

$$x_0\geqslant\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k\Big/\left(\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)\quad(i>0)\qquad(6.7.44)$$

由于 $y=\frac{x}{1+x}$ $(x\geqslant 0)$ 是 x 的增函数，故

$$x_0\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\Big/\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)=\frac{2}{5}. \qquad (6.7.45)$$

今选$x_0=\frac{2}{5}$。则由（6.7.42）定出方程组（6.7.35）之一非负解x_i $(-\infty<i<\infty)$，且

$$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ x_i\neq 0,\ x_i\neq 1\ (-\infty<i<+\infty). \qquad (6.7.46)$$

由于$f^*_{i\overline{A_0}}$是方程组（6.7.35）的最小非负解，故

$$f^*_{i\overline{A_0}}\neq 1 \qquad (i\geqslant 0) \qquad (6.7.47)$$

所以此链非常返，并且

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A_0))\neq 0. \qquad (6.7.48)$$

下面，我们证明A_0为几乎闭集，由(6.7.48)，只需证明

$$\overline{\mathscr{L}}(A_0)=\overline{\mathscr{L}}(A_0). \qquad (6.7.49)$$

倘若（6.7.49）不真，则必有

$$P(x_n\in\{(0,+1),(0,-1)\}\text{无穷次})>0 \qquad (6.7.50)$$

但这与非常返性矛盾。

因为此链非常返，所以A_0之任意有限子集为不可回集。由此并参考〔4，定理6.5.1〕的证明易证至多有下列三种情况发生：

(i) A_0为一个原子几乎闭集且集$\{(i,0):-\infty<i<0\}$与集$\{(i,0):0<i<+\infty\}$（或即集$\{(i,0):0\leqslant i<+\infty\}$）都是不可回集；

(ii) A_0为一个原子几乎闭集，但$\{(i,0):-\infty<i<0\}$与

$\{(i, 0), 0<i<+\infty\}$ 中有一个是原子几乎闭集，一个是不可回集；

(iii) $\{(i, 0), -\infty<i<0\}$与$\{(i,0), 0\leqslant i<+\infty\}$都是原子几乎闭集。

实际上，情况 (i) 和 (ii) 也不可能发生。若情况 (i) 发生，则集$\{(0, +1), (0, -1)\}$到达无穷次的概率为正，这与非常返性矛盾；若情况 (ii) 发生，则这与我们链的"左右对称性"矛盾；所以只有情况 (iii) 才能发生。即A_0为两个原子几乎闭集所构成。同样，$A_j(-\infty<j<+\infty)$ 也为两个原子几乎闭集所构成。所以，我们这个链有无穷多个边界点，它们与原子几乎闭集

$$\{(i, j), j<0\}, \{(i, j), j\geqslant 0\}. \qquad (-\infty<i<+\infty)$$

一一对应[1]。

§6.8. 有势$N(\geqslant 2)$元组随机徘徊

定义6.8.1. 设$X(\omega)=\{x(n, \omega), n\geqslant 0\}$是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的齐次马尔可夫链，其状态空间是E_N，转移矩阵是$P=(p(e, e'), e, e'\in E_N)$ 如果

$$\sum_{e'\in F_e\cup\{e\}} p(e, e')=1, \quad \forall e\in E_N. \qquad (6.8.1)$$

$$p(e, e')=0, \quad \forall e' \bar{\in} F_e\cup\{e\}, \quad \forall e\in E_N. \qquad (6.8.2)$$

（记号见§6.5）则称$X(\omega)$（或$P=(p(e, e'),)$）为（狭义）N元组随机徘徊。

由定理6.3.4，定理6.5.1和定理6.5.2立即得到

定理6.8.1 对于N元组随机徘徊$P=(p(e, e'), e, e'\in E_N)$，下

述断言等价：

(i) 它有势；

(ii) 它路径无关；

(iii) 它弱可配称；

(iv) 对于$\forall e\in E_N$，有

$$p(e;e_{k,l}^{(1)})p(e_{k,l}^{(1)};e_{k,l}^{(2)})p(e_{k,l}^{(2)};e_{k,l}^{(3)})p(e_{k,l}^{(3)};e)$$
$$=p(e;e_{k,l}^{(3)})p(e_{k,l}^{(3)};e_{k,l}^{(2)})p(e_{k,l}^{(2)};e_{k,l}^{(1)})p(e_{k,l}^{(1)};e)$$
$$1\leqslant k<l\leqslant N,\ \forall e\in E_N. \tag{6.8.3}$$

所用的记号见（6.5.8）。如果它有势，则它的势函数是$(-\log \pi_e;\ e\in E_N)$：

$$\pi_e=\pi_{e_0}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=\mathrm{sign}\,i_k}^{i_k}\frac{p(e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k};e_{k,l})}{p(e_{k,l};e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k})} \tag{6.8.4}$$

记号见（6.5.10）。此处π_{e_0}是任意正常数。

定理6.8.2. N元组随机徘徊$P=(p(e;e'))$可配称（可逆）的充要条件是定理6.8.1中的（i）～（iv）之一成立。并且

$$\pi_{e_0}^{-1}\triangleq\sum_{e\in E_N}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=\mathrm{sign}\,i_k}^{i_k}\frac{p(e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k};e_{k,l})}{p(e_{k,l};e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k})}<\infty. \tag{6.8.5}$$

若它可配称，则唯一配称分布是由这里的π_{e_0}和（6.8.4）所定义$(\pi_e;\ e\in E_N)$。

§6.9. 有势马尔可夫过程

设$X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t\geqslant 0\}$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的齐次可列马尔可夫过程，其状态空间是$E$，转移矩阵是$P(t)=$

$(p_{ij}(t))$:

$$\left.\begin{array}{l} p_{ij}(t)\geqslant 0;\quad \sum\limits_{j\in E} p_{ij}(t)=1 \\ p_{ij}(t+s)=\sum\limits_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s) \\ \lim\limits_{t\to 0} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=p_{ij}(0) \end{array}\right\} \qquad (6.9.1)$$

其中 $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0(i\neq j)$。以后也称 $P(t)=(p_{ij}(t))$为马尔可夫过程。

称$P(t)$是零同的，如果

$$p_{ij}(t)>0 \Longleftrightarrow p_{ji}(t)>0. \qquad (6.9.2)$$

定义6.9.1. 设$P(t)$零同．取$T=[0,\ \infty)$,$a_{ij}(t)=p_{ij}(t)$．则由本章§6.2所定义的场$P(t)=(p_{ij}(t))$ 称为马氏过程场．

熟知，$p_{ij}(t)$ 或者恒为零或者恒不为零．因此，马氏过程场$P(t)$ 的路与t无关．即$\mathscr{L}(t)$不依赖于t． 因此，$D(t)$,$E_l(t)$ 等均不依赖于t．以下就去掉这些记号中的t．

由定理6.3.4立即得到

定理6.9.1. 关于马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$， 下述断言等价：

(i) $P(t)$有势；

(ii) $P(t)$路径无关；

(iii) $P(t)$弱可配称；

(iv) 对于$\forall l\in D$, $\forall i$, $j\in E_l$，有

$$\hat{p}_{\Delta_l i}(t)p_{ij}(t)\hat{p}_{j\Delta_l}(t)=\hat{p}_{\Delta_l j}(t)p_{ji}(t)\hat{p}_{i\Delta_l}(t)$$

$$\forall t\in T. \qquad (6.9.3)$$

下面两条定理是本节的主要結果．

定理6.9.2 如果不可约马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$有势，则

它有一个保守势（$-\log v_i(1)$），并且它的一切势形如

$$u_i(t) = -\log v_i(1) + f(t) \quad (6.9.4)$$

其中（$v_i(1)$）由（6.3.11.）所定义。$f(t)$为T上的函数。

证明 如果$P(t)$有势，则由（6.3.11）所定义的（$v_i(t)$）是$P(t)$的一个配称列（由定理6.3.4及（6.3.13）），于是

$$v_i(t)p_{ij}(t) = v_j(t)p_{ji}(t) \quad \forall t \in T, \ \forall i,\ j \in E. \quad (6.9.5)$$

然而

$$\begin{aligned} v_i(t)p_{ij}(2t) &= \sum_{k\in E} v_i(t)p_{ik}(t)p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k\in E} p_{ki}(t)v_k(t)p_{kj}(t) \\ &= v_j(t)\sum_{k\in E} p_{jk}(t)p_{ki}(t) \\ &= v_j(t)p_{ji}(t). \end{aligned} \quad (6.9.6)$$

由数学归纳法易见

$$v_i(t)p_{ij}(mt) = v_j(t)P_{ji}(mt), \quad \forall m \geq 1. \quad (6.9.7)$$

注意我们取定Δ_i，并约定$v_{\Delta_i}(t) \equiv 1$（见(6.3.11)），以及$P(t)$不可约，从而有

$$v_i(mt) = v_i(t) = \hat{p}_{\Delta_i i}(t)/\hat{p}_{i\Delta_i}(t), \quad (6.9.8)$$

进而

$$v_i\left(\frac{m}{n}\right) = v_i(1) = \hat{p}_{\Delta_i i}(1)/\hat{p}_{i\Delta_i}(1), \ \forall m,n. \quad (6.9.9)$$

（6.9.8）表明$v_i(t)$连续，而（6.9.9）表明它在有理点上取常数值$v_i(1)$。从而

$$v_i(t) \equiv v_i(1), \quad \forall t \in T \quad (6.9.10)$$

今设（$\widetilde{u_i}(t)$）是$P(t)$的任一势，则因$P(t)$不可约，故

$$\widetilde{u}_l(t)-\widetilde{u}_{\Delta_l}(t)=-\log v_i(t)+\log v_{\Delta_l}(t)$$

$$=-\log v_i(1) \qquad (6.9.11)$$

它形如（6.9.4）。至于由（6.9.4）所定义的 $(u_i(t))$ 是势则是显然的。

定理6.9.3. 如果马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$ 有势，则它有一个保守势（$-\log v_i(1)$），并且它的一切势形如

$$u_i(t)=-\log v_i(1)+f_l(t),\ j\in E_l,\ l\in D. \qquad (6.9.12)$$

其中$(v_i(1))$ 由(6.3.11)所定义。$(f_l(t), l\in D)$是T上的一族函数。

证明 易由定理6.9.2推出。

推论1 马氏过程场 $P(t)=(P_{ij}(t))$ 的势由它的保守势完全决定，进而由 $P(1)$ 的势 $(v_i(1))$完全决定。

推论2 马氏过程 $(p_{ij}(t))$ 有配称函数列 $(u_i(t))$ 等价于它有配称数列 $(u_i>0; i\in E)$。

自此以后，凡弱可配称均指它有配称（数）列。

同定理6.6.4一样，我们有

定理6.9.4. 马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$ 的每一个保守势 (u_i) 所产生的配称列都是（$P(t)$的）有限正调和测度。

定理6.9.5. 马氏过程$P(t)=(p_{ij}(t))$ 可配称的充要条件是下述诸条件同时成立。

(i) $P(t)$零同；

(ii) 定理6.9.1中的(i)～(iv) 之一成立；

(iii) 对于任意选定的$t_0>0$，对于$\forall l\in D$，有

$$\pi_l^{-1}\triangleq\sum_{i\in E_l}\frac{\hat{p}_{\Delta_l i}(t_0)}{\hat{p}_{i\Delta_l}(t_0)}<\infty \qquad (6.9.14)$$

在可配称时，配称分布为 $(v_l(t_0)w_l\pi_l;\ i\in E_l,\ l\in D)$ 此处 $(w_l;\ l\in D)$是任意选定的D上的一个正分布。

§6.10. 有势Q矩阵

命$a(t)\equiv Q=(q_{ij})$。由定理6.3.4得

定理6.10.1. 设Q是一个零同的Q矩阵，则下述断言等价：

(i) Q有势；

(ii) Q路径无关；

(iii) Q弱可配称；

(iv) 对于$\forall l\in D$，$\forall i$，$j\in E$，有

$$\hat{q}_{\Delta_l i}q_{ij}\hat{q}_{j\Delta_l}=\hat{q}_{\Delta_l j}q_{ji}\hat{q}_{i\Delta_l}. \qquad (6.10.1)$$

定理6.10.2. Q矩阵Q可配称的充要条件是下 述 诸 条 件 同 时成立：

(i) Q零同；

(ii) 定理6.10.1中的(i)～(iv) 之一成立；

(iii) 对于每一个$l\in D$，有

$$\pi_l^{-1}\triangleq\sum_{i\in E_l}\frac{\hat{q}_{\Delta_l i}}{\hat{q}_{i\Delta_l}}<\infty \qquad (6.10.2)$$

在可配称时，任选 $(w_l>0,\ l\in D)$ 使$\sum_{l\in D}w_l=1$，则$(v_iw_l\pi_l;\ i\in E_l,\ l\in D)$ 便是Q的配称分布。其中 (v_i) 由 (6.3.11) 所定义。

定义6.10.1. 称Q矩阵$Q=(q_{ij})$为二元组生灭Q矩阵， 如果 它满足

$$q(i, j; k, l)>0, \ \forall(k, l)\in F_{ij}, \ \forall(i, j)\in E_2. \tag{6.10.3}$$

$$q(i, j; k, l)=0, \forall(k, l)\overline{\in}F_{ij}\cup\{(i, j)\}, \quad \forall(i, j)\in E_2. \tag{6.10.4}$$

其中

$$F_{ij}=\{(i, j-1), (i-1, j), (i, j+1), (i+1, j)\}, \quad (i, j)\in E_2. \tag{6.10.5}$$

如果它还满足

$$\sum_{(k,l)\in F_{ij}\cup\{(i,j)\}} q(i, j; k, l)=0, \ \forall(i,j)\in E_2. \tag{6.10.6}$$

则称之为保守的，否则称之为非保守的。

定理6.10.3. 对于二元组生灭Q矩阵，下述断言等价：

(i) 它有势；

(ii) 它路径无关；

(iii) 它弱可配称；

(iv) 对于一切 $(i, j)\in E_2$，有

$$q(i, j; i+1, j)\, q(i+1, j; i+1, i+1)q(i+1, j+1; i, j+1)q(i, j+1; i, j)$$
$$=q(i, j; i, j+1)q(i, j+1; i+1, j+1)q(i+1, j+1; i+1, j)q(i+1, j; i, j) \tag{6.10.7}$$

如果它有势，则它的势函数是 $(-\log\pi(i, j))$：

$$\pi(i, j)=\pi(0, 0)\prod_{l=\mathrm{sign}\,i}^{i}\frac{q(l-\mathrm{sign}\,l,0;l,0)}{q(l,0;l-\mathrm{sign}\,l,0)}\cdot \prod_{k=\mathrm{sign}\,j}^{j}\frac{q(i,k-\mathrm{sign}\,j;i,k)}{q(i,k;i,k-\mathrm{sign}\,j)} \tag{6.10.8}$$

其中π (0, 0) 是任意正常数。

定理6.10.4. 二元组生灭Q矩阵可配称的充要条件是定理6.10.3中的 (i)~(iv) 之一成立，并且

$$(\pi(0,0))^{-1} \triangleq \sum_{(i,j)\in E_2} \prod_{l=\mathrm{sign}i}^{i} \frac{q(l-\mathrm{sign}i,0;l,0)}{q(l,0;l-\mathrm{sign}i,0)} \cdot \prod_{k=\mathrm{sign}j}^{j} \frac{q(i,k-\mathrm{sign}j;i,k)}{q(i,k;i,k-\mathrm{sign}j)} < \infty \tag{6.10.9}$$

在可称配时，唯一的配称分布是由 (6.10.8) 和 (6.10.9) 所定出的$(\pi(i,j);\ (i,\ j)\in E_2)$。

类似地可以写出关于N元组生灭Q矩阵及其它一些Q矩阵的结果，我们不再赘述了。

§6.11. 有势Q过程

取

$$E=(0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{6.11.1}$$

定义6.11.1. 若以Q矩阵Q为密度矩阵的Q过程$P(t)=(p_{ij}(t))$有势，则称$P(t)$为有势Q过程。

§6.9中的全部结果自然都适用于Q过程。此外易见

定理6.11.1. 如果Q过程$(p_{ij}(t))$有势(弱可配称，可配称)，则它的Q矩阵有势(弱可配称，可配称)。

定理6.11.2. 最小解$(p_{ij}^{\min}(t))$弱可配称的充要条件是它的Q矩阵弱可配称。

证明 与定理2.3.6的证法相同。

定理6.11.3. 设$P(t)=(p_{ij}(t))$是弱可配称Q过程，则对于某一对i，$j\in E$，

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj} \qquad (6.11.2)$$

成立的充要条件是

$$p'_{ji}(t)=\sum_{k\in E}q_{jk}p'_{ki}(t) \qquad (6.11.3)$$

成立

证明 与定理2.6.1的证法相同.

定理6.11.4. 如果Q保守、弱可配称并且Q过程唯一，则最小Q过程是有势的. 进而，这个有势最小Q过程可逆的充要条件是Q既约、可配称.

证明 由定理6.11.2及定理2.5.1立得本定理.

§6.12. 有势生灭(双边生灭)Q过程

仍取

$$E=(0, 1, 2, \cdots) \qquad (6.12.1)$$

定理6.12.1. (保守生灭Q过程).

对于任给的一个保守生灭Q矩阵Q，要么有势(相应地，可逆)生灭Q过程不存在，要么恰好有一个. 详言之，在$R=+\infty$时，生灭Q过程唯一，这个唯一的Q过程就是最小Q过程；它是有势的；而且此时它还是可逆的充要条件是$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty$. 在$R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$时，只有满足柯氏向前微分方程组的那个唯一生灭$Q$过程

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{\xi_\lambda(i)\xi_\lambda(j)\mu_j}{\lambda\sum_{i\in E}\xi_\lambda(i)\mu_i} \quad (i,j\in E) \; (6.12.2)$$

是有势的；而且它还是可逆的. 在其余情况($R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i=+\infty$)

下，不存在有势生灭Q过程，更不存在可逆生灭Q过程。

证明 由定理6.11.4立得 $R=+\infty$ 时之结论。由可逆Q过程必是有势Q过程及定理3.1.3立得 $R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$ 时之结论。当 $R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i=+\infty$ 时，这时 Q 过程非唯一。但不存在满足柯氏向前微分方程组的(不断的) Q过程。故由定理6.11.3知，这时有势Q过程不存在。定理证毕。

定理6.12.2. (非保守生灭Q过程)

设Q非保守。当且仅当x_∞为正则时存在有势生灭Q过程。而在x_∞正则时，有势生灭Q过程唯一，它是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{(1-\lambda\xi_\lambda 1)(1-\lambda\xi_\lambda 1)'}{\lambda[1-\lambda\xi_\lambda 1,\ 1]} \qquad (6.12.3)$$

并且它是可逆Q过程。

证明 由定理6.11.3，当x_∞流出时，在[2，定理5]中构造出来的Q过程的表达式中的参数$p=0$。再参考定理3.2.1的证明过程立得我们的定理。

现在，取

$$E=(0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \qquad (6.12.4)$$

定理6.12.3. (双边生灭Q过程)

(i) 设 $R_a=+\infty(a=1,\ 2)$。则这时Q过程唯一。这个唯一的Q过程是有势的。进而此时它可逆的充要条件是$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$。

(ii) 设 $R_a=+\infty$，$R_b<+\infty(a\neq b)$。则这时存在有势Q过程的充要条件是 $S_b<+\infty$(即r_2正则)。在$S_b<+\infty$时有唯一的有势双边生灭Q过程，它就是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{\xi_{b\lambda}\xi'_{b\lambda}}{\lambda[\xi_{b\lambda},\ 1]}. \qquad (6.12.5)$$

进而此时它可逆的充要条件是

$$(\sum_{i<0}\mu_i)\delta_{a,1}+(\sum_{i>0}\mu_i)\delta_{a,2}<+\infty. \tag{6.12.6}$$

(iii) 设 $R_a<+\infty$，$R_b<+\infty$。这时存在有势 Q 过程的充要条件是$S_a<+\infty$，$S_b<+\infty$。在 $S_a<+\infty$，$S_b<+\infty$时有无穷多个有势Q过程，它们是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda{}^*+\frac{(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})'}{\lambda[\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda},\ 1]} \tag{6.12.7}$$

及

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda{}^*+[\xi_\lambda]'\mathfrak{M}_\lambda[\xi_\lambda{}']. \tag{6.12.8}$$

其中

$$\mathfrak{M}_\lambda=m\begin{pmatrix}1+mU_\lambda{}^{11} & -1+mU_\lambda{}^{12}\\ -1+mU_\lambda{}^{21} & 1+mU_\lambda{}^{22}\end{pmatrix} \tag{6.12.9}$$

m是满足 $0<m<r_2-r_1$ 的任一实数。这时任一有势Q过程都是可逆的。

证明 (1) 由定理6.11.4立得(i)。

(2) $R_a=+\infty, R_b<+\infty$ 时，全部Q过程已在[3, § 6]中构造出来。由[3]中的(6.2)和(6.11)以及有势 Q过程Π_λ的对称性立得(ii)。

(3) 参看定理3.3.4相应部分的证明并注意[3]中的(8.32) 式易证(iii)。

§ 6.13. 有势单流出Q过程

定义6.13.1. 对于一个Q矩阵 $Q=(q_{ij})$，如果它保守且方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda u_i-\sum_{i\in E}q_{ij}u_j=0\quad(\lambda>0)\\ 0\leqslant u_i\leqslant 1\quad(i\in E)\end{array}\right\} \tag{6.13.1}$$

只有一个线性独立的非零解，则称Q为单流出的。这时的Q过程称为单流出Q过程。一个单流出Q过程若有势，就称为有势单流出Q过程。

定理6.13.1. 设Q为单流出Q矩阵，则存在有势单流出Q过程的充要条件是：Q弱可配称并且

$$\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<+\infty\quad(\lambda>0). \tag{6.13.2}$$

有势单流出Q过程存在时必定唯一，它就是

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_{kj}}{\lambda\sum_{k\in E}\pi_k x_k(\lambda)}\quad(i,j\in E) \tag{6.13.3}$$

其中 $\pi=(\pi_i)$是Q的配称列，而

$$x_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda).\qquad(i\in E) \tag{6.13.4}$$

证明 Ⅰ）存在性。

i）充分性，〔5〕中找到了任一单流出Q过程的表现

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+x_i(\lambda)\frac{\sum_{k\in E}\alpha_k p_{kj}^{\min}(\lambda)+\xi_j(\lambda)}{\sum_{k\in E}\alpha_k(1-x_k(\lambda))+\lambda\sum_{k\in E}\xi_k(\lambda)}.$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \tag{6.13.5}$$

其中

$$\alpha_k\geqslant 0,\ \sum_{k\in E}\alpha_k(1-x_k(\lambda))<+\infty, \tag{6.13.6}$$

$\xi_j(\lambda)$满足

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\xi_j(\lambda)-\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)q_{ij}=0\\&\xi_j(\lambda)\geqslant 0,\sum_{j\in E}\xi_j(\lambda)<+\infty\end{aligned}\right\} \tag{6.13.7}$$

及

$$\xi_j(\lambda)-\xi_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\xi_i(\mu)p_{ij}^{\min}(\lambda)=0$$

$$(\lambda>0,\ \mu>0) \quad (6.13.8)$$

又若$\alpha_k=0$ $(k\in E)$，则$\xi_j(\lambda)\neq 0$。

今命

$$\xi_j(\lambda)=x_j(\lambda)\pi_j, \qquad (j\in E) \qquad (6.13.9)$$

由于Q单流出，所以

$$\xi_j(\lambda)=x_j(\lambda)\pi_j\neq 0. \qquad (6.13.10)$$

注意$x_i(\lambda)$满足(6.13.1)，得

$$\lambda\xi_j(\lambda)-\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)q_{ij}=\lambda x_j(\lambda)\pi_j-\sum_{i\in E}x_i(\lambda)\pi_i q_{ij}$$

$$=\lambda x_j(\lambda)\pi_j-\sum_{i\in E}x_i(\lambda)\pi_j q_{ji}=0.\ (j\in E,\lambda>0) \quad (6.13.11)$$

另一方面，由定理6.11.2知

$$\pi_i p_{ij}^{\min}(\lambda)=\pi_j p_{ji}^{\min}(\lambda),\ (\lambda>0,\ i,\ j\in E) \qquad (6.13.12)$$

显见

$$x_j(\lambda)-x_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}p_{ji}^{\min}(\lambda)x_i(\mu)=0 \qquad (6.13.13)$$

得

$$\xi_j(\lambda)-\xi_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\xi_i(\mu)p_{ij}^{\min}(\lambda)$$

$$=x_j(\lambda)\pi_j-x_j(\mu)\pi_j+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}x_i(\lambda)\pi_i p_{ij}^{\min}(\lambda)$$

$$=\pi_j[x_j(\lambda)-x_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}x_i(\lambda)p_{ij}^{\min}(\lambda)]$$

$$=0. \qquad (6.13.14)$$

由(6.13.10)，(6.13.2)，(6.13.11)和(6.13.14) 知 $\xi_j(\lambda)(j\in E, \lambda>0)$ 满足 (6.13.7) 和 (6.13.8)。并且$\xi_j(\lambda)\neq 0(j\in E,\ \lambda>0)$。所以

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_{k\in E}x_k(\lambda)\pi_k}$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \qquad (6.13.15)$$

是一个Q过程．显然它是有势的．

ii) 必要性：

设已存在一有势Q过程$(p_{ij}(\lambda))$．则由定理6.11.1知Q矩阵Q弱可配称．往证(6.13.2)．

容易由表达式(6.13.5)导出，一个Q过程满足柯氏向前微分方程组的充要条件是$\alpha_i=0\ (i\in E)$．故由定理6.11.3知，有势Q过程$(p_{ij}(\lambda))$必呈如下形状

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)\xi_j(\lambda)}{\lambda\sum_{k\in E}\xi_k(\lambda)}$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \tag{6.13.16}$$

其中$\xi_j(\lambda)$满足(6.13.7)和(6.13.8)，并且$\xi_j(\lambda)\neq 0(j\in E,\ \lambda>0)$．

由Q的弱可配称性及定理6.11.2知(6.13.12)成立．由此事实及(6.13.16)得

$$\pi_i x_i(\lambda)\xi_j(\lambda)=\pi_j x_j(\lambda)\xi_i(\lambda)$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \tag{6.13.17}$$

令

$$D(\lambda)=(i:\ \xi_i(\lambda)>0) \tag{6.13.18}$$

由(6.13.8)及$\xi_j(\lambda)\neq 0$知

$$D(\lambda)\neq\phi \qquad (\lambda>0) \tag{6.13.19}$$

所以由(6.13.17)得

$$\frac{\pi_i x_i(\lambda)}{\xi_i(\lambda)}=\frac{\pi_j x_j(\lambda)}{\xi_j(\lambda)} \qquad (i,\ j\in D(\lambda)) \tag{6.13.20}$$

从而

$$\frac{\pi_i x_i(\lambda)}{\xi_i(\lambda)}=c(\lambda)<+\infty \quad (i\in D(\lambda)) \tag{6.13.21}$$

即

$$\pi_i x_i(\lambda)=c(\lambda)\xi_i(\lambda) \qquad (i\in D(\lambda)) \tag{6.13.22}$$

由(6.13.19)和(6.13.22)得

$$\pi_i x_i(\lambda)\xi_j(\lambda)=\pi_j x_j(\lambda)\xi_i(\lambda)=c(\lambda)\xi_j(\lambda)\xi_i(\lambda)$$

$$(i\in E,\ j\in D(\lambda)) \qquad (6.13.23)$$

由(6.3.19)及

$$\xi_j(\lambda)\neq 0 \qquad (j\in D(\lambda)) \qquad (6.13.24)$$

得

$$\pi_i x_i(\lambda)=c(\lambda)\xi_i(\lambda) \qquad (i\in E) \qquad (6.13.25)$$

由$(\xi_j(\lambda))$满足(6.13.7)得

$$\sum_{i\in E}\xi_j(\lambda)<+\infty \qquad (\lambda>0) \qquad (6.13.26)$$

由(6.13.21)，(6.13.25)和(6.13.26)得

$$\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)=c(\lambda)\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)<+\infty \qquad (6.13.27)$$

于是(6.13.2)成立。至此，必要性得证。

Ⅱ）唯一性。

由(6.13.13)和Q为单流出知，对于任一λ，必存在$i_0\in E$，使$x_{i_0}(\lambda)\neq 0$。于是由(6.13.25)知$c(\lambda)>0$。由此及(6.13.21)得

$$0<c^{-1}(\lambda)<+\infty \qquad (\lambda>0) \qquad (6.13.28)$$

再由Ⅰ）中必要性部分的证明知，若$(\widetilde{p}_{ij}(\lambda))$为任一有势单流出$Q$过程，则必有

$$\widetilde{p}_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)c^{-1}(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda c^{-1}(\lambda)\sum_{k\in E}x_k(\lambda)\pi_k}$$

$$=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_{k\in E}x_k(\lambda)\pi_k},$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \qquad (6.13.29)$$

于是由Ⅰ）中充分性部分的证明知这时有势Q过程只有一个。

以上讨论都是对于一个固定的满足条件(6.13.2)的配称列(π_i)而言的. 我们已经证明，对于每一个满足(6.13.2)的配称列，有且仅有一个有势Q过程与之对应. 现在的问题是:

①条件(6.13.2)是否与配称列的具体取法有关. 即是否存在两个配称列(π_i)和(w_i)，使

$$\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<\infty, \tag{6.13.30}$$

但

$$\sum_{i\in E}\mathrm{w}_i x_i(\lambda)=\infty. \tag{6.13.31}$$

② 满足条件(6.13.2)的不同的配称列所对应的有势Q过程是否相同?

先看①. 因为Q弱可配称，故可分块. 由Q单流出知，存在且仅存在一个子块Q_{l_0}，使得Q_{l_0}是单流出的，而其它子块$Q_l(l\in D, l\neq l_0)$都是零流出的. 今设配称列(π_i)满足(6.13.2)，而(w_i)是Q的任一配称列. 由Q_{l_0}既约知

$$\mathrm{w}_i=c_{l_0}\pi_i,\quad \forall i\in E_{l_0} \tag{6.13.32}$$

其中c_{l_0}是一正常数. 又由$Q_l(l\neq l_0)$既约零流出知

$$x_i(\lambda)=0,\ \forall i\in E_l,\ l\neq l_0,\ \forall\lambda>0 \tag{6.13.33}$$

于是

$$\sum_{i\in E}\mathrm{w}_i x_i(\lambda)=c_{l_0}\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<\infty \tag{6.13.34}$$

故条件(6.13.2)与(π_i)的具体取法无关.

再看②. 设配称列(π_i)和(w_i)满足(6.13.2)，它们相应的有势Q过程分别是$(p_{ij}(t))$和$\widetilde{p}_{ij}(t)$. 往证

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=p_{ij}(t),\ \forall i,\ j\in E,\ \forall t. \tag{6.13.35}$$

因为每一子块 $Q_l(l\in D,\ l\neq l_0)$既约零流出，故由Q过程的唯一性知

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=p_{ij}^{\min}(t)=p_{ij}(t),\quad \forall i,\ j\in E_l,\ l\neq l_0 \tag{6.13.36}$$

$$\sum_{j\in E_l}\widetilde{p}_{ij}(t)=\sum_{j\in E_l}p_{ij}^{\min}(t)=\sum_{j\in E_l}p_{ij}(t)=1$$

$$\forall i\in E_l,\ l\neq l_0 \tag{6.13.37}$$

于是

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=0=p_{ij}(t),\ i\in E_l,\ j\in E_{l_0},\ l\neq l_0. \tag{6.13.38}$$

由(6.13.38)和有势Q过程的弱可配称性知

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=p_{ij}(t)=0,\quad i\in E_{l_0},\ j\in E_l,l\neq l_0 \tag{6.13.39}$$

于是 $(\widetilde{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E_{l_0})$是一个单流出$Q$过程，并且有势．由(6.13.32) 知，$(\widetilde{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E_{l_0})$也是一个相应于 $(\pi_i,\ i\in E_{l_0})$ 的有势Q过程．根据前面所证，相应于同一个配称列的有势 Q 过程唯一，故有

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=p_{ij}(t),\ \forall i,\ j\in E_{l_0} \tag{6.13.40}$$

由(6.13.36)，(6.13.38)，(6.13.39)和(6.13.40) 知 (6.13.35)成立。

至此，定理证毕。

参考文献

〔1〕 侯振挺，郭青峰．齐次可列马尔可夫过程．科学出版社，1978．

〔2〕 杨超群，一类生灭过程，数学学报，15:1(1965)，9—31．

〔3〕 杨超群，双边生灭过程，南开大学学报，5:5(1964)，9—40．

〔4〕 杨超群，可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质，数学进展，7:4(1964)，397—424．

〔5〕 Reuter G. E. H. Denumerable Markov processes（Ⅰ），J. London Math, Soc, 37(1959)，81—91．

可逆马尔可夫过程

作者（按姓氏笔划为序）

陈木法 汪培庄 侯振挺 郭青峰

钱　敏 钱敏平 龚光鲁

装帧设计：张小平

*

湖南科学技术出版社出版

湖南省新华书店发行

湖南省新华印刷二厂印刷

*

1979年8月第1版第1次印刷

字数：158,000　印数：1—7,000　印张：7.75

统一书号：13204·5　　定价：0.85元